

AYUDAS HIPERMEDIALES DINÁMICAS (AHD) EN LA ENSEÑANZA DE LA
FUNCIÓN SENO EN ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO EN LA INSTITUCIÓN
EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DE LA PRESENTACIÓN EN LA VIRGINIA
RISARALDA

JHONIER DE JESÚS MOLINA CASTAÑEDA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, COLOMBIA
2018

Contenido

RESUMEN	5
.....	5
INTRODUCCIÓN.....	6
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	7
1.1. PROBLEMA EDUCATIVO	7
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	8
1.3. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	9
1.4. NATURALEZA DEL PROBLEMA.....	9
1.5. ESTADO DEL ARTE	10
1.6. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	12
1.6.1. Objetivo General.....	12
1.6.2. Objetivos Específicos	12
1.7. JUSTIFICACIÓN.....	12
2. MARCO TEÓRICO.....	13
2.1. BASES TEÓRICAS	13
2.1.1. Modelo pedagógico socioconstructivista.....	14
2.1.2. Teorías de aprendizaje	15
2.1.3. Diseño y desarrollo de sistemas de aprendizajes colaborativos	20
2.1.4. Teoría de las situaciones didácticas Guy Brousseau	22
2.1.8. Las TIC en la matemática	35
Ver anexo A.....	35
2.1.10. Significado y componentes del conocimiento didáctico del contenido	35
2.1.12. Los conocimientos del profesor de Matemáticas.....	41
2.1.13. Fundamento breve de la caracterización de cada una de las dimensiones del KQ:.....	45
2.2. DIDÁCTICA DE LA TRIGONOMETRÍA	48
2.3. SISTEMA DIDÁCTICO	48
2.4. TPACK	50
2.4.1. El Conocimiento de los Contenidos (CK)	54
2.4.2. El Conocimiento Pedagógico (PK).....	54
2.4.3. El Conocimiento Tecnológico (TK)	54
2.4.4. El conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)	55
2.4.5. El Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK)	55
2.4.6. El Conocimiento Tecnológico-Pedagógico (TPK)	56
2.5. CONOCIMIENTO TECNO – PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO	56
3. CONCEPTOS BÁSICOS.....	56
3.1. FUNCIÓN	56
3.2. FUNCIÓN SENO.....	57
3.2.1. Concepto de Función Trigonométrica	57
3.2.1.1. La Función Seno.....	57
4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	59
4.1. TIPO DE ESTUDIO.....	59
4.2. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN	60
4.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN	60
4.3.1. Técnica de Observación Participante.....	60

4.3.2. Registros videográficos.....	61
4.4. DISEÑO METODOLÓGICO	61
4.4.1. Diseño de modelo pedagógico. (DMP).....	61
4.4.2. Diseño y creación de la Ayuda Hipermedial dinámica para la enseñanza de la función SENO en el marco del modelo pedagógico.....	65
4.5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	69
5. CONCLUSIONES	70
C.1	70
C.2	71
C3	72
5.1. CONCLUSIÓN GENERAL.....	73
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

RESUMEN

La presente investigación “*Ayudas Hipermediales Dinámicas en la Enseñanza de la Función Seno con estudiantes de décimo grado*” proyecta darle significación a la enseñanza de este núcleo temático dinamizándolo con el uso de las Tic, debido a dificultades de tipo didáctico que presentan los docentes al abordar dicha categoría, lo que permitirá reorganizar su enseñanza teniendo como referente La Teoría de Las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau(1998), el fundamento pedagógico, la Teoría Socio-constructivista de Vigostky (1978) y el sustento metodológico de teorías de aprendizaje como el aprendizaje colaborativo, el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje autónomo.

El trabajo es de tipo cualitativo y tiene como marco fundamental la Didáctica de la Matemática, siendo los sujetos de estudio los estudiantes de décimo grado con quienes se trabajó en la perspectiva de determinar los aportes didácticos que ofrecen las Ayudas Hipermediales Dinámicas en la enseñanza de la función seno, en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase. En tal sentido, esta propuesta didáctica dará lugar a la creación de una secuencia didáctica como estrategia de enseñanza que le permitirá al docente dinamizar sus procesos.

A más de lo mencionado, se manifiesta que la investigación se enmarca dentro del macroproyecto de Ayudas hipermediales dinámicas (AHD) en la enseñanza de las matemáticas, que aborda la pregunta de investigación: ¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de Ayudas hipermediales dinámicas en la enseñanza de la función seno con estudiantes de grado diez, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase? por lo cual, en el presente escrito se tiene como propósito evidenciar los aportes didácticos en los docentes de matemáticas en ejercicio.

INTRODUCCIÓN

El actual escrito de indagación se realiza en el marco del macroproyecto de las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) para la enseñanza de la Matemática, permitiendo determinar desde allí, los aportes didácticos de las AHD en la enseñanza de la función seno, con estudiantes de grado décimo de la institución educativa Nuestra Señora de La Presentación en La Virginia Risaralda.

Así mismo, se plantea que la investigación es cualitativa de tipo interpretativo y está centrada en analizar aspectos como la actuación del docente, posterior reflexión sobre las posibilidades didácticas que ofrece la AHD en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase; lo que condujo a la creación de una AHD como instrumento para el apoyo de cada clase de trigonometría, desde un enfoque socio constructivista, con aprendizajes autónomo basado en problemas y colaborativo.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.PROBLEMA EDUCATIVO

Como referente del trabajo se tuvo los estándares básicos de competencias en matemáticas emanados por el Ministerio Educación Nacional, (MEN, 2015), en los que se propone que el estudiante tanto describa el pensamiento espacial y los sistemas geométrico como también modele fenómenos periódicos del mundo real, usando relaciones y funciones trigonométricas y por tanto, abordar desde allí, el Derecho Básico de Aprendizaje N° 14: que describe “Comprende la definición de las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$, en las cuales x puede ser cualquier número real, y calcula a partir del círculo unitario el valor aproximado de $\sin(x)$ y $\cos(x)$ y también traza sus gráficas e identifica sus propiedades (rango, dominio y periodo). DBA (MEN, 2016)”.

La presente investigación parte del problema didáctico reflejado en los procesos de aprendizaje que dan cuenta los resultados de las pruebas SABER 9° del año 2016, según informe del índice sintético de calidad (ISC) Institución Educativa La Presentación - Hacia la ruta de la excelencia. (MEN, 2017). Donde se refiere que hay debilidades en el componente geométrico métrico, representación y modelación.

Tal problemática no escapa al papel del maestro como sujeto de enseñanza, quien en la mayoría de los casos registrados en la misma institución aún utiliza el modelo tradicional y ha olvidado la incorporación de las tic en la enseñanza de las matemáticas, solo concibiendo la enseñanza de la función seno desde lo geométrico, teniendo como referente la construcción de la función seno (su gráfica) y sus características, olvidando por completo, la matematización del movimiento, la importancia del análisis funcional en situaciones problema cotidianos y por ende, la periodización del movimiento.

1.2.FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Desde la experiencia docente en el área de matemáticas se evidencia dificultades en la enseñanza de la trigonometría, generando apatía del estudiante hacia las matemáticas e incluso aumento en la repetición y deserción escolar.

En tal sentido, el docente se encuentra de espaldas a lo planteado por el MEN, en cuanto a los estándares básicos de competencias en matemáticas tal como se plantea anteriormente en el párrafo inicial del problema educativo, en lo que refiere a lo que el estudiante debe describir y a su vez modelar, usando relaciones y funciones trigonométricas, abordando así el Derecho Básico de Aprendizaje N° 14: comprende la definición de las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$, en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula, a partir del círculo unitario, el valor aproximado de $\sin(x)$ y $\cos(x)$, también traza sus gráficas e identifica sus propiedades (rango, dominio y periodo). DBA (MEN, 2016).

Teniendo en cuenta el referente planteado, se evidencia que el estudiante carece de interpretación y modelación de situaciones problema cotidianos como de la comprensión de la transcendencia del análisis funcional, y es desde allí de donde surgen los vacíos conceptuales, toda vez que no tiene las herramientas para vislumbrar el mundo que lo rodea desde el análisis funcional, especialmente desde la relación y función trigonométrica como la función seno.

Los fundamentos teóricos se desarrollan a través de la lectura de diversos documentos, entre ellos, Amador Montaña, J. F., Rojas Garcia, J. L., Sanchèz Bedoya, H. G., & Duque, Acosta, E. (2015), entre otros. En particular, sobre algunas tesis que han tomado como objeto de estudio la enseñanza de las funciones trigonométricas los procesos cognitivos involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje de la trigonometría elemental.

Con estos referentes teóricos se construye la plataforma teórico-conceptual que permite el análisis del problema de investigación, planteado de la siguiente manera:

1.3.PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de Ayudas hipermediales dinámicas en la enseñanza de la función seno con estudiantes de grado decimo, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase?

1.4.NATURALEZA DEL PROBLEMA

La didáctica de las funciones no puede enseñarse desde la generalidad del objeto matemático, sino desde la particularidad de cada función trigonométrica y las condiciones socioculturales de su construcción. Montiel (2005).

Desde la perspectiva del aprendizaje del estudiante, hay una confusión en cuanto a lo que son razones y funciones trigonométricas, evidenciándose una mezcla de conceptos al momento de resolver situaciones problema con funciones.

En tal sentido, se está priorizando en los procesos de enseñanza- aprendizaje de la trigonometría, cuando se aborda específicamente el objeto matemático *funciones trigonométricas*, el cómo se aprende y cómo se enseña, pero no, el qué se enseña, olvidándose del enfoque de matematización del movimiento como fenómeno oscilatorio, y evitando proyectar este saber matemático a contextos de enseñanza real para el estudiante y es así, como el docente se encuentra también inmerso en una dificultad cuando enseña este núcleo temático, los métodos utilizados para construir conocimiento al respecto lo limitan, es decir, en palabras de Rico y Sierra: “no logra volver la matemática una actividad social ni mucho menos una actividad científica”, situación que termina simplemente en la presentación de unos gráficos, los cuales el estudiante termina pasando desapercibidamente. Finalmente, es en esta perspectiva, como el maestro y el estudiante se entrelazan en una encrucijada, que convergen en apatía y desinterés, especialmente en el estudiante.

1.5. ESTADO DEL ARTE

Es innegable las diversas y relevantes investigaciones que se encuentran correlacionadas a esta propuesta de la apropiación del uso de las TIC en el área de matemática con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, desde una perspectiva dinamizadora e innovadora que le permite al docente, resignificar su práctica y al estudiante, mejorar los procesos de aprendizaje. En tal sentido, se encuentran las siguientes investigaciones:

Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, elaborada por Sandra Castillo en la Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela. Mayo de 2009.

Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TIC Andrés Alexander Sánchez Rosal; Universidad Rafael Bellosó Chacín Maracaibo, Venezuela EDUTEC: Revista Electrónica de Tecnología Educativa febrero de 2010.

Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría mediada por las nuevas tecnologías: estudio de caso en el curso nivelatorio de matemáticas básicas de la universidad nacional de Colombia – sede Medellín.
Autor: por Gloria Luz Urrea Galeano. Octubre de 2012.

Construcción de las funciones trigonométricas haciendo un contraste entre la utilización y ausencia de TIC. Valderrama Ramírez, Nathalia.

Katerin (2013) Construcción de las funciones trigonométricas haciendo un contraste entre la utilización y ausencia de Tic. Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia.

Este trabajo presenta una propuesta enmarcada en el análisis didáctico propuesto en Gómez (2002) para la estructura conceptual de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, la cual se implementa para dos grupos de estudiantes de grado decimo de la IED los

Alpes. Para el primero, se implementa en el aula de clases con los materiales convencionales (tablero - cuaderno), sin la utilización de Tic y bajo la orientación del docente; para el segundo, se utiliza la herramienta LMS por medio de la plataforma Moodle para gestionar los contenidos e involucra la utilización de otras Tic. Al finalizar la puesta en práctica de la propuesta, se contrastan los resultados de los dos grupos, resaltando aspectos relevantes para cada metodología, de los que se espera sirvan de base para emprender un nuevo ciclo en el que se implemente la utilización de Tic como apoyo a la labor docente en el proceso de enseñanza aprendizaje. (Urrea, G. 2012).

El proceso de incorporación de TIC lo ha asumido el grupo de investigación CRIE - Creando en Redes de Información y Educación) de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP), en el marco del programa Computadores para Educar (CPE), como una propuesta apoyada en el uso pedagógico de las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD), estrategia que integra una variedad de recursos digitales, con una planeación previa en un instrumento denominado diseño tecno pedagógico (Coll, Mauri, & Onrubia, 2008b).

Una AHD es concebida como “un producto multimedia provisto de: un sistema de hipertextualidad, un conjunto de estrategias comunicativas, un contenido específico, un sistema de evaluación y de un soporte específico para uso en procesos de enseñanza y aprendizaje, desde un enfoque socioconstructivista” (Rojas, Sánchez, Amador & Duque, 2013, p.44).

1.6.OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.6.1. Objetivo General

Determinar la Incidencia de los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas desde el enfoque socioconstructivista en la enseñanza de la función seno, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase, con estudiantes de décimo grado de la institución educativa Nuestra señora de La Presentación en La Virginia Risaralda.

1.6.2. Objetivos Específicos

- Diseñar un modelo pedagógico para la enseñanza de la función seno en el aula de clase.
- Crear una Ayuda Hipermedial Dinámica para favorecer la enseñanza de la función seno en el aprendizaje la trigonometría.
- Crear una secuencia didáctica con uso de la AHD para la enseñanza de la función seno y desarrollarla en el aula de clase para valorar los aportes didácticos.

1.7.JUSTIFICACIÓN

La experiencia docente ha sido la fundamentación de la presente investigación. Teniendo en cuenta las dificultades presentadas al abordar la enseñanza de este núcleo temático (La Función Seno) y las reflexiones hechas a cada momento sobre las prácticas, ha permitido identificar falencias que se reflejan directamente en el proceso de aprendizaje del estudiante y así mismo, ha permitido asociarlas con dificultades similares en la práctica de enseñanza de otros docentes de matemáticas del entorno.

En cuanto a la enseñanza del objeto matemático en cuestión, se descubre que el estudiante no le da significación a lo aprendido y, por tanto, no encuentra sentido a los contenidos recibidos

para resolver situaciones cotidianas de su entorno o para darle explicación a fenómenos físicos de su vida o cotidianidad.

Las matemáticas, además de desarrollar la intuición y el pensamiento crítico, constituyen un elemento insustituible de formación en el rigor, formalismo y razonamiento. Sin embargo, el estudiante sea niño, joven o adulto suelen estar poco interesados en el desarrollo de su destreza numérica, incluso llegando a experimentar en algunos casos desasosiego cuando se acerca la hora de la clase de Matemáticas. Y es así, que partiendo de esta observación y experiencia se establece que el rechazo a esta área de la ciencia es la consecuencia directa de la influencia de variables de naturaleza cognitiva y emocional: por una parte, la dificultad objetiva de las matemáticas como disciplina y por otra, la manera subjetiva con que el individuo afronta esta dificultad. (Mulero, J., Segura, L., Sepulcre, J. 2014).

La anterior problemática expuesta del aprendizaje de la matemática esta vista desde la óptica del estudiante, pero si se observa desde la enseñanza del maestro, también se observa situaciones que tienen que ver con lo didáctico; la reflexión que asume el docente sobre el porqué y el para qué se enseña la matemática y específicamente, las funciones trigonométricas, en tal sentido, se debe dinamizar la práctica docente con el uso de herramientas tecnológicas que permitan significar el aprendizaje y desarrollar las competencias y estándares planteados por el MEN.

2. MARCO TEÓRICO

2.1.BASES TEÓRICAS

Este apartado presenta los diferentes fundamentos teóricos que sustenta la investigación, desde el enfoque pedagógico hasta las diferentes teorías y metodologías de aprendizaje (aprendizaje basado en problemas (ABP), autónomo y colaborativo). Además, las consideraciones desde el rol docente como sujeto de enseñanza, realizadas por Lee Shulman (1989) en su teoría conocimiento didáctico del contenido del profesor, como también fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

La incidencia que tiene el uso de las ayudas hipermediales dinámicas (AHD), desde una perspectiva didáctica, en la enseñanza de la función seno en estudiantes de grado 10, de la Institución educativa Nuestra Señora de La Presentación en La Virginia Risaralda.

Se presenta también, fundamentos sobre el objeto matemático, foco de esta investigación, como lo es la función seno.

2.1.1. Modelo pedagógico socioconstructivista

Lev Vygotsky (1978) es considerado el precursor del constructivismo social. A partir de él, se han desarrollado diversas concepciones sociales sobre el aprendizaje. Algunas de ellas amplían o modifican sus postulados, pero la esencia del enfoque constructivista social permanece. Lo fundamental de su enfoque es considerar al individuo como el resultado del proceso histórico y social donde el lenguaje desempeña un papel esencial. Para él, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico. También rechaza los enfoques que reducen la Psicología y el aprendizaje a una simple acumulación de reflejos o asociaciones entre estímulos y respuestas. Existen rasgos específicamente humanos no reducibles a asociaciones, tales como la conciencia y el lenguaje, que no pueden ser ajenos a la Psicología. A diferencia de otras posiciones, Lev Vygotsky no niega la importancia del aprendizaje asociativo, pero lo considera claramente insuficiente.

Constructivismo Social es aquel modelo basado en el constructivismo, que dicta que el conocimiento además de formarse a partir de las relaciones ambiente-yo, es la suma del factor entorno social a la ecuación: Los nuevos conocimientos se forman a partir de los propios esquemas de la persona producto de su realidad, y su comparación con los esquemas de los demás individuos que lo rodean.

El constructivismo social es una rama que parte del principio del constructivismo puro y el simple constructivismo es una teoría que intenta explicar cuál es la naturaleza del conocimiento humano, busca ayudar a los estudiantes a internalizar, reacomodar, o transformar la

información nueva. Esta transformación ocurre a través de la creación de nuevos aprendizajes y esto resulta del surgimiento de nuevas estructuras cognitivas que permiten enfrentarse a situaciones iguales o parecidas en la realidad. Así "el constructivismo" percibe el aprendizaje como actividad personal enmarcada en contextos funcionales, significativos y auténticos.

Todas estas ideas han sido tomadas de matices diferentes, se pueden destacar dos de los autores más importantes que han aportado más al constructivismo: Jean Piaget con el "Constructivismo Psicológico" y Lev Vigotsky con el "Constructivismo Social". El constructivismo de Jean Piaget o Constructivismo Psicológico. Según Tunnerann, C. (2014) desde la perspectiva del constructivismo psicológico, el aprendizaje es fundamentalmente un asunto personal. Existe el individuo con su cerebro cuasi-omnipotente, generando hipótesis, usando procesos inductivos y deductivos para entender el mundo y poniendo estas hipótesis a prueba con su experiencia personal.

Ver anexo 1. Características del socioconstructivismo

2.1.2. Teorías de aprendizaje

2.1.2.1. Aprendizaje basado en problemas (ABP):

Es una metodología centrada en el aprendizaje, en la investigación y reflexión que siguen los estudiantes para llegar a una solución ante un problema planteado por el profesor. Generalmente, dentro del proceso educativo, el docente explica una parte de la materia y, seguidamente, propone a los estudiantes una actividad de aplicación de dichos contenidos. Sin embargo, el ABP se plantea como medio para que los estudiantes adquieran esos conocimientos y los apliquen para solucionar un problema real o ficticio, sin que el docente utilice la lección magistral u otro método para transmitir ese temario.

Barrows (1986) define al ABP como "un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos

conocimientos”. Aquí los protagonistas del aprendizaje son los estudiantes, que asumen la responsabilidad de ser parte activa en el proceso.

Prieto (2006) defendiendo el enfoque de aprendizaje activo señala que “el aprendizaje basado en problemas representa una estrategia eficaz y flexible que, a partir de lo que hacen los estudiantes, puede mejorar la calidad de su aprendizaje universitario en aspectos muy diversos”. El estudiante desarrolla y a trabaja diversas competencias. Entre ellas, de Miguel (2005) destaca:

- Resolución de problemas.
- Toma de decisiones.
- Trabajo en equipo.
- Habilidades de comunicación (argumentación y presentación de la información).
- Desarrollo de actitudes y valores: precisión, revisión, tolerancia.
- Prieto (2006) citando a Engel y Woods añade:
- Identificación de problemas relevantes del contexto profesional.
- La conciencia del propio aprendizaje.
- La planificación de las estrategias que se van a utilizar para aprender.
- El pensamiento crítico - El aprendizaje autodirigido.
- Las habilidades de evaluación y autoevaluación.

Del mismo modo, Benito y Cruz (2005) aparte de las competencias ya citadas indican que el ABP favorece el desarrollo del razonamiento eficaz y la creatividad. Y aparte de las mencionadas se puede decir que el ABP favorece el desarrollo de habilidades en búsqueda y manejo de información y además, desarrolla las habilidades de investigación, toda vez que a partir de un enunciado se averigua y comprende qué es lo que pasa y lograr una solución.

Características del ABP (Anexo 1)

2.1.2.2. Aprendizaje Autónomo

Proceso que permite a la persona desarrollarse independientemente, ser autor de su desarrollo, eligiendo los caminos, las estrategias, las herramientas y los momentos que considere pertinentes para aprender y poner en práctica de manera autónoma lo que ha aprendido. (Gonçalves, 2011)

Para la autora es adecuado establecer procedimientos no solo para que el estudiante aprenda de forma autónoma, dentro de unos límites planificados, sino también para que reflexione sobre el proceso en el que está inmerso, de manera que, en el futuro, cuando su trabajo sea completamente autónomo, tenga criterios para planificarlo y gestionarlo.

Para lograrlo, el profesor diseña una actividad concreta, el estudiante debe trabajar de forma guiada: para conseguir un determinado objetivo de aprendizaje. El estudiante tendrá un margen de movimiento en su respuesta, pero siempre dentro de unos límites preestablecidos. Sin embargo, a la vez, debemos garantizar que adquiera unas habilidades que le permitan ir desarrollando esas actividades con un grado de autonomía creciente. La forma de conseguirlo consiste en exigir al estudiante que desarrolle un proceso de reflexión para que sea consciente de su propia forma de aprender. (Gonçalves, 2011). Lo anterior desarrolla aprendices autónomos.

2.1.2.3. Autorregulación

La autorregulación del aprendizaje fundamentada en el socioconstructivismo es considerada como un proceso en el cual el estudiante se involucra en las actividades de una manera consciente y reflexiva. Este nivel de consciencia está en el campo de que el mismo estudiante identifica sus posibilidades y sus limitaciones frente a la realización de la tarea. (*Huertas, 2009.*).

Según Zimmerman (2000), la autorregulación se entiende como “la capacidad de generar pensamientos, sentimientos y actuaciones por parte del estudiante, orientados a conseguir objetivos. La autorregulación más que una capacidad mental o una habilidad académica, es un

proceso de autodirección mediante el cual los estudiantes transforman sus capacidades en habilidades académicas. Citado por (Amador Montaña, Rojas Garcia, & Sanchèz Bedoya, 2015).

Ver anexo 2: La Enseñanza Estratégica para la autonomía.

2.1.2.4. Aprendizaje Colaborativo

Para acercarnos a una conceptualización, ya sea soportado tecnológicamente o no, acudamos a lo que nos dice Cabrera (2008): “El aprendizaje colaborativo se define como aquella situación en la que un grupo de personas establece un compromiso mutuo para desarrollar una tarea y en la que, sólo la coordinación y relación de sus intercambios les permite alcanzar un logro común” (Cardozo Cardone, 2010)

En este sentido, la construcción de aprendizaje colaborativo surge como aquel conjunto de mediaciones pedagógicas, digitales o no digitales, a través de los cuales se pretende aunar los esfuerzos de un grupo determinado hacia el objetivo de que juntos puedan aprender; escenario en el que aparece la tecnología para la generación de nuevos espacios o entornos que conduzcan a la construcción del conocimiento y el aprendizaje (Johnson, 1999). Se refiere a grupos pequeños y heterogéneos trabajando juntos en una tarea en la cual, cada miembro es responsable individualmente de una parte de la actividad que no puede ser completada sino en un trabajo colectivo y en un estado de interdependencia. (Cardozo Cardone, 2010)

Lo anterior considera que para que el aprendizaje colaborativo se produzca en un entorno conversacional como acto mediado por la palabra y el discurso, los participantes tienen que intentar establecer diálogos, negociaciones, explicaciones. Como base para que haya un intercambio debe haber experiencias previas compartidas, estrategias para obtener información, maneras de argumentar las ideas y propuestas, formas de evaluar las aportaciones de los demás, repetir y reformular lo que dicen los otros. (Bergoña & contreras., 2006).

- *Diseño, de tareas para el aprendizaje colaborativo:* Las tareas diseñadas para los entornos colaborativo, tienen el objetivo de conducir a la obtención de unas metas

propuestas, por eso su diseño se convierte en la base fundamental para la construcción colaborativa de conocimiento. Al respecto Kirschner (2004) considera que existen tres dimensiones sobre las cuales debe desarrollarse el diseño de tareas o las actividades. Citado por (*Cardozo Cardone, 2010*).

- *La propiedad de la tarea:* Hace referencia sobre quién determina la tarea y la concreción que se da en el aula es importante a la hora de determinarlo que se basa en dos principios fundamentales: 1. La responsabilidad individual: Hace referencia a la preparación que desarrolla el estudiante en relación con su responsabilidad en la actividad que hay que realizar. Este aspecto es especialmente importante para la motivación del que aprende y 2. La interdependencia positiva: Consiste en suscitar la necesidad de que los miembros de un grupo tengan que trabajar juntos para realizar el trabajo encomendado. Para ello el docente propone una tarea clara y un objetivo grupal para que los estudiantes sepan que se hunden o saldrán a flote juntos. Pero hay que tomar decisiones sobre la responsabilidad de la ejecución de la tarea. El éxito de cada miembro del grupo está unido al resto del grupo, y viceversa. Se establece a través de objetivos de grupo (aprender y asegurarse de que los demás miembros del grupo también aprendan), reconocimiento grupal (el esfuerzo no es individual, sino de grupo), división de recursos (distribución de información y limitación de materiales) y roles complementarios.
- *El carácter de la tarea:* Tiene que ver sobre cómo se determina si una tarea es relevante o no para los estudiantes. La autenticidad de las tareas es uno de los puntos críticos frecuentemente mencionados en las investigaciones y también uno de los más difíciles. En este sentido, las opciones metodológicas adoptadas en las enseñanzas se centran en el uso del trabajo orientado a la realización de proyectos, a la solución de casos, la solución de problemas para facilitar el acercamiento a problemas y situaciones auténticas.

- *El control de la tarea:* Hace referencia al tipo de interacción y participación del profesorado y de los estudiantes.

2.1.3. Diseño y desarrollo de sistemas de aprendizajes colaborativos

Kumar (1996) sintetiza sus aportaciones respecto al diseño y desarrollo de sistemas de aprendizajes colaborativos en 7 elementos que son: Citado por (Cardozo Cardone, 2010):

2.1.3.1.Control de las interacciones colaborativas:

Se refiere al modo de establecer un sistema de apoyo a la comunicación entre los participantes. Un sistema de aprendizaje colaborativo puede tener una parte activa en el análisis y el control de la colaboración. Por ejemplo, las formas de estructuración de las tareas, la posibilidad de espacios grupales para el trabajo, el uso de sistemas de comunicación sincrónica y asincrónica, el proceso de comunicación con el profesorado.

2.1.3.2.Los dominios de aprendizaje colaborativo:

Son de orden complejo, necesitan que los grupos adquieran habilidades para: planear Juntos, categorizar, memorizar y la distribución de tareas. La idea es que el grupo sepa cuáles son los prerequisites del tema a aprender y refuerce e internalice el tema utilizando el medio colaborativo. (*Lage, 2005*).

2.1.3.3.Tareas en el aprendizaje colaborativo:

Los participantes se enfrentan a diferentes tipos de tareas, pero, en todos los casos, una de las principales ejecuciones hace referencia a la resolución de tareas de tipo procedimental. El análisis y la resolución de problemas es fundamental. Sin embargo, este hecho no quiere decir que las tareas tengan que centrarse de forma exclusiva en este tipo de actividades. No obstante, es

un error establecer todas las actividades a partir de procesos colaborativos ya que también hay que conceder importancia a las dimensiones individuales del aprendizaje.

2.1.3.4. Los entornos colaborativos de aprendizaje:

Conjunto de elementos en interrelación que constituyen un sistema que favorece el aprendizaje, hay posibilidades: entornos de aprendizaje grupal que permitan el trabajo en equipo, dos o más estudiantes trabajando en el mismo problema en sincronía, o un sistema de trabajo asíncrono, un espacio basado en la autorización. En este sentido, las posibilidades que otorgan las nuevas tecnologías son muchas y muy variadas.

2.1.3.5. Roles en el entorno colaborativo:

El diseño de un entorno necesita considerar el tamaño del grupo, las formas de participación, así como la distribución de los roles. El rol de cada estudiante puede cambiar durante el proceso, pero es necesario establecer ciertas responsabilidades para asegurar que los estudiantes aprenden a trabajar en grupo, en situaciones colaborativas, donde cada uno es responsable de su propio trabajo. La distribución de roles requiere además estrategias de comunicación y negociación.

2.1.3.6. Tutorización en el aprendizaje colaborativo:

Son las diversas interacciones que apoyan el aprendizaje, entre estudiantes en el mismo nivel, entre el estudiante y el estudiante experto y entre el estudiante y el maestro. *(Siza, 2009)*. Hay numerosos métodos de tutorización que pueden apoyar el aprendizaje colaborativo: tutorización entre iguales, aprender enseñando, aprendizaje a través de la negociación.

2.1.3.7.Colaboración mediante apoyo tecnológico:

Ha tenido cambios muy sustanciales en las dos últimas décadas. Ya sea de comunicación Sincrónica o asincrónica, haciendo uso de chat, correo electrónico o foros de discusión (*Siza, 2009*).

Características aprendizaje colaborativo (anexo 2)

2.1.4. Teoría de las situaciones didácticas Guy Brousseau

2.1.4.1.La teoría de situaciones didácticas

Dentro de esta disciplina (la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa), Guy Brousseau desarrolla la “Teoría de Situaciones” que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

Guy Brousseau (1999) afirma: “La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los estudiantes, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los estudiantes y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores.”

La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista -en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986) de esta manera: “El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.”

2.1.4.2.Situaciones didácticas y Situaciones a-didácticas

Devolución Es el rol fundamental que esta teoría otorga a la “situación” en la construcción del conocimiento se ve reflejado en la descripción que tomamos de Brousseau (1999): “Hemos llamado ‘situación’ a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición ‘anterior’ de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”.

La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los estudiantes un saber determinado. Brousseau, en 1982, la definía de esta manera (citado por Galvez,1994) “Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o explícitamente entre un estudiante o un grupo de estudiantes, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos estudiantes se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.”

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al estudiante la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central - dentro de la organización de la enseñanza-, a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el estudiante se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.

El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica), definida así por Brousseau (1986): “El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el estudiante (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego”.

Johsua y Dupin (1993, Cap. V) sintetizan así la manera en que estas hipótesis y conceptos se articulan en la teoría: “Lo que caracteriza la perspectiva constructivista, es la voluntad de poner al estudiante en situación de reducir conocimientos (en general reformulando-y luchando contra-conocimientos anteriores) en referencia en primer lugar al problema, y no en primer lugar a la intención de la enseñanza. Es la presencia y la funcionalidad en la situación didáctica de una etapa de situación a-didáctica la marca principal de la diferencia con las situaciones estrictamente formales”.

Es conveniente analizar cuestiones relacionadas con los términos que se acaban de introducir. En primer lugar, es posible al comienzo del descubrimiento de este dominio, confundirse con la interpretación de los términos “didáctica” y “a-didáctica”. La situación didáctica es una situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el estudiante debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución.

Por otra parte, la definición de situación a-didáctica contiene distintos aspectos que conviene analizar separadamente:

a) El carácter de necesidad de los conocimientos: La “situación” se organiza de manera que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, en el sentido de que la situación “no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende”. La comprensión de esta idea es fundamental para el análisis didáctico de una situación, y en particular para identificar en una secuencia de enseñanza los distintos aspectos a los que se apunta en cada etapa.

El problema es que a menudo se confunde lo que es necesario con lo que es posible de utilizar como procedimiento para resolver un problema, y en consecuencia se confunden los conocimientos que se requieren o no poner en juego para dominar la situación. Un buen acercamiento a esta cuestión es pensarlo por la negativa: es decir por los conocimientos que NO

son necesarios para dominar una situación. Por ejemplo, si al reunir sobre la mesa dos colecciones de 15 y 17 autos (carros pequeños de juguete), respectivamente se pregunta por la cantidad total de autos, no es cierto que sea necesario realizar el cálculo de la suma: la operación “ $15 + 17$ ” es uno de los tantos procedimientos posibles para adicionar las cantidades. Como las colecciones están disponibles, los estudiantes pueden reunir los autos y contar el total o realizar sobre conteo. Decimos entonces que esta situación no apunta al cálculo (aunque los estudiantes puedan, obviamente, calcular). Cuando las colecciones no están disponibles, en cambio, el cálculo de la suma es necesario para “dominar de manera conveniente” este problema de adición de cantidades. Podrá argumentarse que los estudiantes pueden acudir a representaciones de las dos cantidades -por ejemplo, dibujando palitos- y evitar el cálculo contando el total. También puede argumentarse que los estudiantes podrían evitar el cálculo usando los dedos. Efectivamente, en ciertas condiciones pueden surgir procedimientos que no requieran el cálculo. Ahora bien, esos procedimientos pueden ser bloqueados desde la situación si se busca hacer evolucionar hacia el cálculo los procedimientos de los estudiantes.

Pero, si no se brindan medios para poder realizar representaciones o si las cantidades (de autos) son muy grandes, los estudiantes no podrán utilizar los procedimientos de conteo o sobre conteo ni con palitos ni con sus dedos, y el cálculo será necesario.

Este análisis muestra que existen características de la situación (en este caso la disponibilidad de medios para representar y el tamaño de los números), que el docente puede variar de manera tal que se modifiquen las estrategias posibles de resolución y en consecuencia el conocimiento a construir. Esta idea será formalizada más adelante en este artículo, al presentar la noción de variable didáctica, concepto central de la teoría.

b) La noción de “sanción”: No debe entenderse como “castigo” por una “culpa, o equivocación”. La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el estudiante interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción, que pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción, y que tenga posibilidad de intentar nuevas resoluciones son criterios fundamentales para que -por sí mismo- establezca relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene.

La siguiente descripción debida a Rolando García (2000) es elocuente del sustento teórico de estas condiciones cuando se busca generar un aprendizaje por adaptación: “una vez que los encuentros “fortuitos” con la “realidad” (que incluye el propio cuerpo) se tornan deliberados, con la construcción de los esquemas, las reiteraciones conducen a anticipar el resultado de una acción. El gran progreso cognoscitivo que realiza un niño, y que la Psicología Genética ha puesto en claro, consiste en poder pasar de “lo empujé y se movió” a “si lo empujo se mueve”.

Este análisis permite también advertir sobre la importancia y el significado del principio de “no intervención” del docente en este proceso: la situación a-didáctica es concebida como un momento de aprendizaje (y no de enseñanza); los estudiantes deben encontrar por sí mismos, relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtienen.

c) La “no intervención” del maestro en relación al saber: Una vez establecida la importancia y el significado de la no intervención del maestro en la situación a-didáctica, queda aún por comprender que la entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de “devolución” desarrollado por Brousseau (1998, Cap.V): “La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al estudiante la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.”

Margolinas (1993, capítulo I) realizando un análisis en relación a la participación del maestro en las fases a-didácticas y a la devolución, señala una interpretación falsa de la noción de situación a-didáctica, “En efecto, no es el silencio del maestro lo que caracteriza las fases a-didácticas, sino lo que él dice.”

Y al analizar el significado de: “En la devolución el maestro se despoja de la parte de responsabilidad que es específica del saber a enseñar” destaca que esto no significa que el maestro se retire o se transforme en un espectador. Y concluye: “ la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento (...) El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina

aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del estudiante en una relación a-didáctica con el problema ” Al comienzo de la formación en didáctica, al docente puede resultarle difícil encontrar intervenciones que permitan esta relación del estudiante con el problema, sin hacer indicaciones sobre cómo resolverlo.

Si no es el silencio del maestro lo que caracteriza estas fases, sino lo que él dice, el maestro se pregunta ¿qué se puede decir? Lo que se puede es alentar la resolución, decir que hay diferentes maneras de resolverlo, anunciar que luego se discutirán, recordar restricciones de la consigna (por ejemplo, si están trabajando sobre las propiedades de un cuerpo, decir “recuerden que no vale armarlo”, etc. Las intervenciones estarán pensadas como para instalar y mantener a los estudiantes en la tarea.

Otra noción importante de la teoría es la de variable didáctica -de la que ya dimos anteriormente un par de ejemplos -. Bartolomé y Fregona (2003) presentan así esta noción en su artículo (ver capítulo IV, en este libro): “La noción de variable didáctica, surgida en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, fue definida a comienzos de la década de los 80, y redefinida más tarde por diferentes autores, entre ellos el mismo Brousseau.”

Las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación.

El docente (Brousseau, 1995) “puede utilizar valores que permiten al estudiante comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes.”

Un problema difícil al comienzo del trabajo en esta teoría, es advertir que no toda característica de una situación constituye una variable didáctica. Dentro del marco general de presentar conceptualmente esta noción, ese problema es analizado y ejemplificado por Bartolomé y Fregona en su artículo, razón por la cual no lo haremos aquí.

2.1.5. *Tipología de situaciones.*

La teoría distingue tres tipos: las situaciones de acción, de formulación y de validación:

2.1.5.1. situaciones de acción:

El estudiante debe actuar sobre un medio (material, Simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.

2.1.5.2. explícitamente Situaciones de formulación:

Un estudiante (o grupo de estudiantes) emisor debe formular un mensaje destinado a otro estudiante (o grupo de estudiantes) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.

2.1.5.3. Situaciones de validación:

Dos estudiantes (o grupos de estudiantes) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones y de llegar a puntos de encuentro.

Una cuestión a retener al iniciarse en la comprensión de esta tipología es el criterio por el cual se identifica una situación particular como de uno u otro tipo. Para ello, hay que tener presente que una situación es de acción cuando lo que requiere de los estudiantes es que pongan

en juego medios de acción; lo que es propio de las situaciones de formulación es el carácter de necesidad que posee la formulación de un mensaje; las situaciones de validación requieren necesariamente no sólo la formulación sino también la validación de juicios por parte de los estudiantes.

Naturalmente, durante el desarrollo de una situación de acción, ¡los chicos también hablan! Pueden incluso llegar a formular lo que hay que hacer para resolver el problema. Pero no es en las participaciones espontáneas de los estudiantes donde se debe buscar identificar el tipo de situación de la que se trata.

La situación no es de formulación por el hecho de que los estudiantes formulen: la situación es una construcción teórica que demanda un tipo particular de funcionamiento que la caracteriza. Entonces, si la situación demanda que los estudiantes actúen, se trata de una situación de acción, aunque los estudiantes intercambien informaciones en el momento de resolver el problema.

Esta diferencia es precisada por Brousseau (1986) al analizar los distintos tipos de situaciones a-didácticas desde el punto de vista de las interacciones con el medio: “Si el intercambio de información no es necesario para obtener la decisión, si los estudiantes comparten las mismas informaciones sobre el medio, la componente “acción” es preponderante.”

Un análisis similar puede realizarse en relación a la emisión de juicios por parte de los estudiantes en situaciones de acción o de formulación, en la medida en que los juicios no son requeridos por esos tipos de situaciones, sino solamente por las situaciones de validación. Brousseau afirma: “Ciertamente la mayoría de las informaciones están implícitamente acompañadas por una afirmación de validez. Pero en la medida en que el emisor no indique explícitamente esta validez, si él no espera ser contradicho o llamado a verificar su información, si el contexto no da una cierta importancia a la cuestión de saber si la información es verdadera, cómo y por qué o si esta validez es susceptible de ser establecida sin dificultad, entonces el mensaje será clasificado como simplemente informativo.”

Otra cuestión importante a retener para evitar uno de los malentendidos habituales en la interpretación de la teoría se refiere a la validación. A menudo se interpreta que la existencia de una “instancia de validación” es específica de las situaciones a-didácticas de validación. Esto no es así: como hemos visto, la posibilidad de que la situación “sancione” las decisiones que toma el estudiante es intrínseca a la noción de a-didáctico y está ligada a la importancia de que el estudiante acceda a una información que le permita juzgar por sí mismo la adecuación o inadecuación de su respuesta. En las situaciones de acción se validan acciones; en las situaciones de formulación se validan mensajes; en las situaciones de validación se validan afirmaciones.

Además, un malentendido es la creencia de que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar necesariamente primero por una situación de acción, luego por una situación de formulación y luego por una situación de validación. Aunque esto pueda ser apropiado en algunos casos no se trata de una regla general.

Por un lado, si bien una situación de validación supone la formulación de una aserción, y la formulación de una aserción supone una acción interiorizada, eso no significa que haya que pasar anteriormente por fases a-didácticas de acción y de formulación. Por otro lado, habrá conocimientos que será oportuno que funcionen implícitamente y cuya formulación explícita será apropiada mucho después, en ocasiones hasta años después (como puede ser el caso de las propiedades de las operaciones que hemos discutido en el capítulo I), o bien conocimientos que sea oportuno formular, pero cuya validación explícita no sea apropiada para estos niveles de escolaridad.

2.1.6. *Institucionalización*

Es el último concepto que se presenta, definido así por Brousseau (1994) “La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del estudiante, y del aprendizaje del estudiante por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.” es de alguna manera complementaria a la devolución. Brousseau (1986) reconoce en estos dos

procesos los roles principales del maestro, y afirma: “En la devolución el maestro pone al estudiante en situación a-didáctica o pseudo adidáctica.

En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones “libres” del estudiante con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status”.

Esta descripción pone a la luz uno de los aspectos teóricos y prácticos más delicados de la articulación entre ambos procesos: los comportamientos o las producciones “libres” del estudiante durante las fases a- didácticas de aprendizaje son constitutivos del sentido de los conocimientos que los estudiantes construyen; definir las relaciones entre esos comportamientos o producciones y el saber cultural o científico significa que la institucionalización supone preservar el sentido de los conocimientos construídos por los estudiantes en las fases a- didácticas de aprendizaje.

Desde el punto de vista teórico el concepto de institucionalización no parece en sí mismo ser más complejo que otros. Sin embargo, es habitual observar en el docente que se inicia en esta disciplina, mayores dificultades en la gestión de la institucionalización, que al llevar a la práctica otros conceptos de la teoría.

Una explicación posible de este fenómeno puede encontrarse en el análisis de Brousseau (1994): “Por supuesto, todo puede reducirse a la institucionalización. Las situaciones de enseñanza tradicionales son situaciones de institucionalización, pero sin que el maestro se ocupe de la creación del sentido: se dice lo que se desea que el niño sepa, se le explica y se verifica que lo haya aprendido. Al principio los investigadores estaban un poco obnubilados por las situaciones a-didácticas porque era lo que más le faltaba a la enseñanza tradicional.”

Debe comprenderse que la institucionalización supone establecer relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural, y no debe reducirse a una presentación del saber cultural en sí mismo desvinculado del trabajo anterior en la clase. Durante la institucionalización se deben sacar conclusiones a partir de lo producido por los estudiantes, se

debe recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, etc., a fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural.

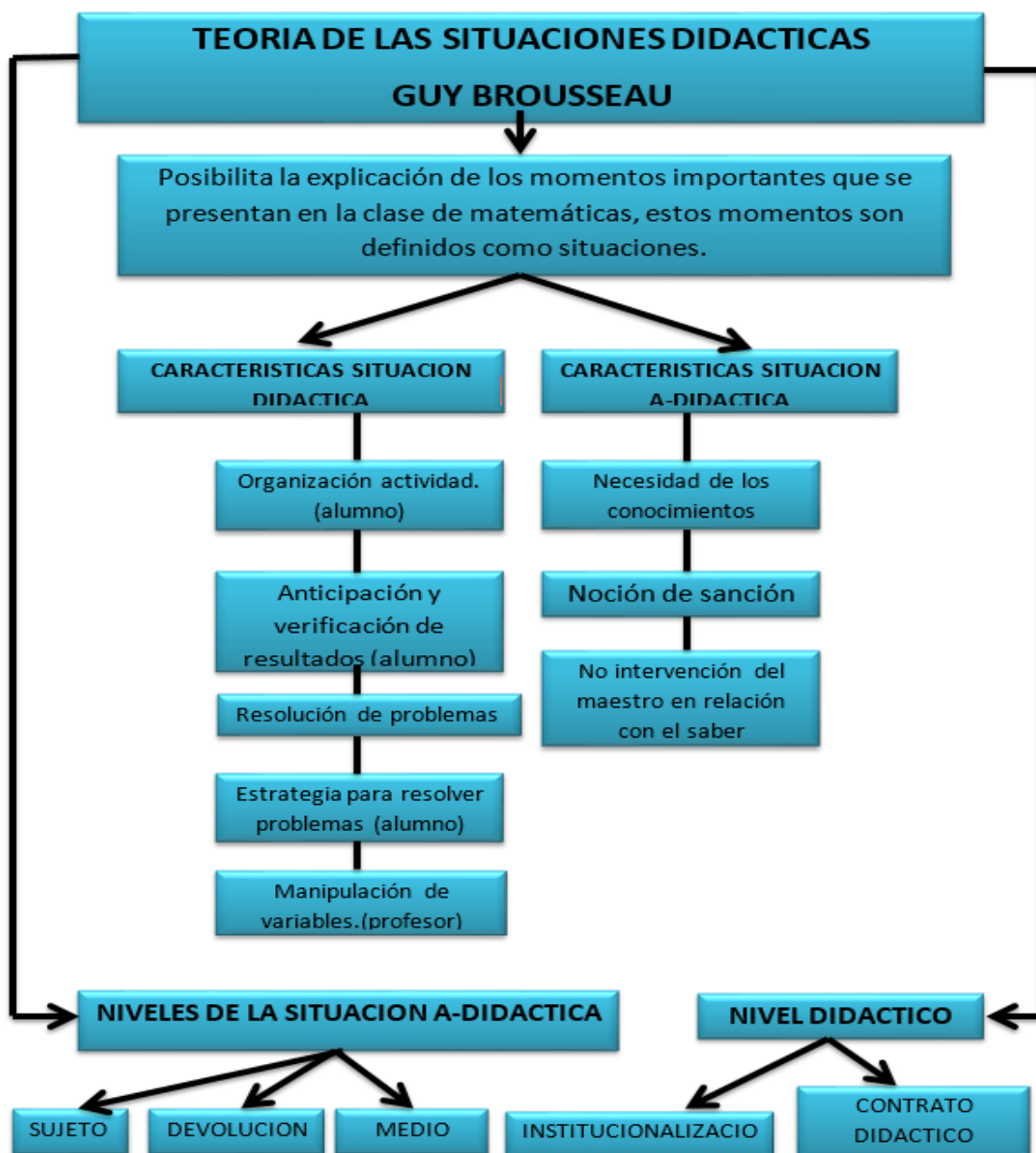
La posibilidad de confundirlo en la práctica con gestiones de clase tradicionales alejadas de este marco teórico, debe advertir sobre la necesidad de profundizar especialmente en el significado de la institucionalización y en las condiciones adecuadas para su gestión.

Figura 1. Teoría de las situaciones didácticas: Guy Brousseau



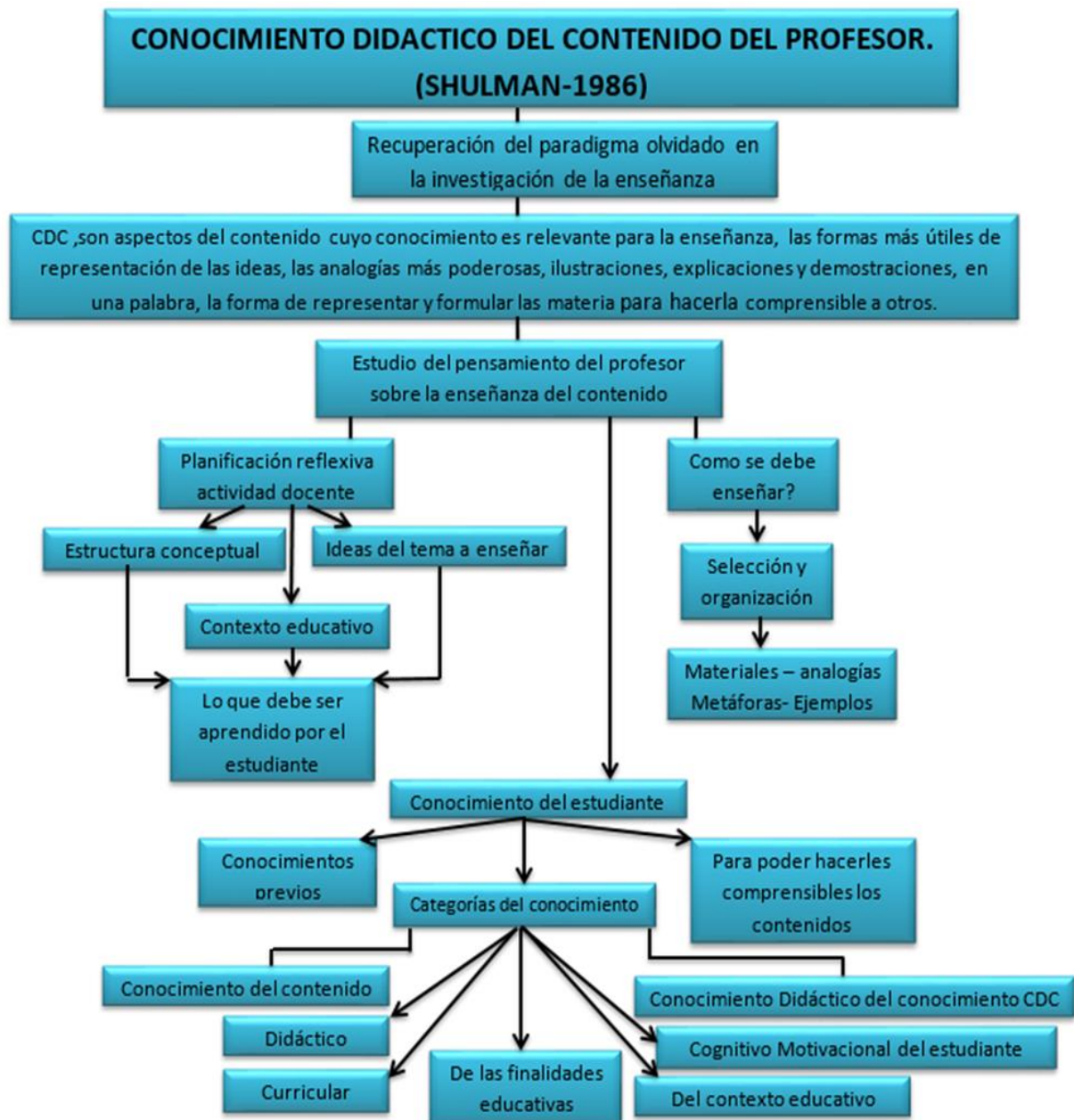
Elaboración propia

Figura 2. Teoría de las situaciones didácticas: Guy Brousseau



Elaboración propia

Figura 3. Conocimiento didáctico del contenido del profesor. (Shulman)



Elaboración propia

2.1.7. Las Tic en la educación.

Ver anexo C

2.1.8. Las TIC en la matemática

Ver anexo A

2.1.9. Incorporación de las tecnologías de información y comunicación. La tecnología realiza el aprendizaje y apoya la enseñanza de la matemática.

Ver anexo B.

2.1.10. Significado y componentes del conocimiento didáctico del contenido

El conocimiento didáctico del contenido¹ es interesante porque identifica los diferentes bagajes de conocimientos para la enseñanza, como señala Shulman (1987): Representa la mezcla entre materia y pedagogía, por la que se llega a una comprensión de cómo se determina temas y problemas, se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes, y se exponen para su enseñanza. El conocimiento didáctico de la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo (p. 8).

El CDC representa la intersección entre conocimiento de la materia *per se*, los principios generales de pedagogía y el contexto; sin embargo, no es una mera conjunción (Shulman, 1993) o integración de elementos, sino una transformación del conocimiento del contenido a contenido enseñable, lo que implica, según Glatthorn (1990), saber cómo adaptar el material representado a las características de los estudiantes.

Para Shulman (1986), el CDC "va más allá del conocimiento de la materia específica *per se* para la dimensión de conocimiento de la materia específica para la enseñanza" (p. 9), ya que si bien el conocimiento de la materia es necesario como uno de los componentes del conocimiento, hay que incorporar elementos adicionales (por ejemplo conocimiento curricular del contenido; repertorio de estrategias instruccionales; selección, diseño y uso diverso de materiales de apoyo; conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido), que marcan la diferencia de ser matemático a ser profesor de matemáticas.

Shulman (1986) define y caracteriza el CDC de la siguiente manera, las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones poderosas; es decir, en una palabra las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros... incluye un conocimiento [o comprensión] de lo que hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y experiencias traen consigo al aprender estos tópicos y lecciones frecuentemente enseñados con anterioridad (p. 9).

Estas formas de representación a que hace referencia son "formas de expresar, exponer, escenificar o representar ideas de otra manera, de suerte que los que no saben puedan llegar a saber, los que no entienden puedan comprender y discernir, y los inexpertos puedan convertirse en expertos" (Shulman, 1987), en otras palabras, se trata de las estrategias de enseñanza a la luz del tópico específico. Así pues, el profesor debe tener un amplio repertorio de formas o alternativas de representación, de las cuales derivan de la investigación, mientras que otras se originan de la práctica docente. El CDC trata de cómo puede ser interpretado el contenido específico en una situación de enseñanza (Cooney, 1994). Supone la comprensión de tópicos centrales en cada materia por parte del profesor y que éste sea capaz de responder a los siguientes tipos de preguntas acerca de cada tópico:

- ¿Qué conceptos clave, habilidades y actitudes potencia este tópico en los estudiantes?
- ¿Cuáles son los aspectos de este tópico que son muy difíciles de entender para los estudiantes?

- ¿Cuál es el más grande interés intrínseco del estudiante?
- ¿Qué analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, simulaciones, manipulaciones u otras formas parecidas son más eficaces para lograr que los estudiantes comprendan este tópico?
- ¿Cuáles pre concepciones de los estudiantes son posibles de considerar en su forma de aprender el tópico? (Shulman y Sykes, 1986, p. 9.)

Caracterizado como un modelo cíclico, sinérgico, integral, flexible, incluyente e investigable (Pinto y González, 2006), el CDC no se puede examinar a partir del estudio de uno de sus componentes sin considerar la inclusión de los otros. Evaluar un solo componente, separado de los otros, conlleva a un riesgo sustancial de distorsionar su significado, caracterización e interpretación. Como modelo, el CDC está compuesto de elementos esenciales que se inter-relacionan y se transforman en representaciones ideales que pueden facilitar su comprensión, desarrollo e investigación, dentro de un continuo de modelos que van de integrativos a transformativos acerca del conocimiento del profesor (Gess-Newsome y Lederman, 1999).

La revisión y el análisis de la perspectiva teórica que sustenta los componentes del CDC ofrecen un panorama sobre los elementos que subyacen a la teoría propuesta por Shulman y colaboradores y que es retomado por otros investigadores (por ejemplo, Chinnappan y Lawson, 2005; Chen, 2004; An, Kulm y Wu, 2004; Sánchez y Llinares, 2002 y 2003; Llinares, 2000; Baxter y Lederman, 1999). Permite una visión específica sobre el conocimiento de la didáctica del contenido específico que incorpora, según Shulman (1986) y Grossman (1989), por lo menos tres componentes básicos: el conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar, el conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico) y el conocimiento del estudiante.

A continuación, se describirán las características y la naturaleza conceptual de cada uno de estos componentes del CDC que contribuyen a comprender la sinergia de conocimiento que debe tener y desarrollar el profesor en su práctica docente:

- Conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar. Shulman (1986) define este primer nivel de conocimiento como la "cantidad y organización de conocimiento *per se* en la mente del profesor" (p. 9). Como elemento esencial y previo a su labor de enseñar, el profesor debe tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar: "el profesor necesita no sólo conocer o comprender qué, sino además saber también por qué esto es así, sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas" (Shulman, 1986, p. 9).

Muchos son los expertos que opinan que los profesores necesitan tener un sólido conocimiento matemático para la enseñanza (por ejemplo, Shulman, 1986; Even, 1990; Llinares, 1993; García, 1997; López, 1999). Conocer bien el contenido de una lección incrementa la capacidad del profesor para realizar actividades diferentes en el aula, coordinar y dirigir las intervenciones y preguntas de los estudiantes, generar un cúmulo de estrategias de enseñanza vinculadas con el contenido y profundizar en el porqué y el para qué de la asignatura. No conocer bien el contenido es limitativo para desarrollar muchas de estas capacidades o habilidades (Carslen, 1987, en López, 1999, y McDiarmid, Ball y Anderson, 1989).

- El estudio del conocimiento del contenido matemático del profesor es una línea de investigación que se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores; así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento.
- Conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico). Shulman (1986 y 1987) y Barnett y Hodson (2001) afirman que los profesores no sólo tienen o deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido

de manera efectiva, es decir, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades del estudiante. Para ello, se debe tener un conocimiento pedagógico (de métodos de enseñanza y aprendizaje) adaptado al contexto específico de la materia, esto es, el conocimiento de la didáctica específica.

Este conocimiento de la didáctica específica se define como las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros (Shulman, 1986, p. 9).

En el conocimiento de la didáctica específica se conjugan dos elementos centrales del CDC: *a)* el conocimiento del profesor acerca de las representaciones de la materia y *b)* el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales asociadas al contenido específico que se enseña (Van Driel, De Jong y Verloop, 2002). La atención, por lo tanto, se centra en el conocimiento del profesor sobre diferentes representaciones instruccionales³ vinculadas a un tópico concreto, el modo como las interpreta y utiliza en el aula, poniendo también en juego el conocimiento y uso de los otros componentes del CDC.

- Conocimiento del estudiante. No menos importante es el tercer componente del CDC: el conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido que desea enseñar. Hawkins (en Smith y Neale, 1989) define este dominio de conocimiento como la habilidad de hacer "penetrable" el contenido a los estudiantes. Consiste en la apremiante necesidad de que el profesor incorpore e integre a su bagaje de conocimientos los diferentes errores, preconcepciones y concepciones de los estudiantes y las condiciones instruccionales necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta (Shulman, 1986). Para Shulman y sus colaboradores, este conocimiento redundaría en una mejor comprensión sobre el tópico específico de que se trate, no sólo por parte de

los estudiantes, sino también en relación con el nivel del CDC que tiene el profesor.

Diferentes autores (por ejemplo, Shulman, 1986; Marks, 1989; McDiarmid, Ball y Anderson, 1989; López, 1999) insisten en la necesidad de que el profesor, además de conocer los procesos psicológicos de aprendizaje, debe también conocer cómo aprende un estudiante a estudiar un tópico específico. Esto implica conocer el origen y evolución del proceso cognitivo del estudiante (según edad, grado, experiencia y escolaridad), las motivaciones (intrínsecas y extrínsecas), las expectativas e intereses, las maneras de aprender, las preconcepciones, concepciones y dificultades relativas al aprendizaje de las matemáticas en general y del tópico específico matemático en particular.

Gran parte de este cuerpo de conocimientos se ha ido adquiriendo como consecuencia de las dos últimas décadas de amplia investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, lo cual ha producido muchos datos útiles sobre concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático (Even y Tirosh, 1995).

2.1.11. El cuarteto del conocimiento (The Knowledge Quartet)

Un eje fundamental que tiene como referente esta investigación, desde el análisis y observaciones que se puede hacer el profesor de matemáticas a su propia clase es la teoría del **Knowledge Quartet**, centrada en la construcción del conocimiento para la enseñanza de la función trigonométrica seno.

El *Knowledge Quartet* es una teoría desarrollada por Tim Rowland (2008), para describir y analizar las observaciones hechas en el aula. Conceptualizado a partir del análisis de las interacciones de los profesores de Primaria con el contenido matemático, distingue cuatro categorías de conocimiento de los profesores: 1. *Fundamento* o conocimiento y comprensión de las Matemáticas *per se*[MKT]; 2. *Transformación* de los conocimientos del profesor para que los

estudiantes sean capaces de aprenderlos (ejemplos, representaciones, etc.); 3. *Conexión* o conocimiento en acción manifestado en la coherencia y 4. Planificación de los contenidos a enseñar [HCK]; y *Contingencia* o conocimiento en interacción en el aula, pensar sobre la marcha.

El *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) o los conocimientos matemáticos que son necesarios para enseñar de Deborah Ball y otros (2008) es un concepto entendido como una combinación de conocimientos de la propia materia (contenidos propios del tema que se enseña) y la pedagogía necesaria para llevar a cabo la empresa de enseñar con éxito (conocimientos y capacidades de los profesores para ayudar a los estudiantes a entender un determinado concepto).

Ahora bien, conocer sólo los contenidos matemáticos no es suficiente para enseñar y de aquí la necesidad del *Horizon Content Knowledge* (HCK) o Conocimiento del Horizonte Matemático. El HCK lo entendemos no como un subtipo del conocimiento de los contenidos matemáticos, sino en un sentido amplio, la conciencia del profesor de los conocimientos matemáticos previos y futuros, como el eje vertebrador de todos los conocimientos anteriores, ya que se relaciona estrechamente con todos ellos y los dota de continuidad. De esta manera, el HCK, como categoría de conocimiento matemático que se refiere tanto a los conocimientos previos como a los futuros, es especialmente relevante durante la transición de la enseñanza Primaria a la enseñanza Secundaria.

2.1.12. Los conocimientos del profesor de Matemáticas

Es un tipo de conocimiento de naturaleza dual, que conjuga aspectos internos, relacionados con su propia estructura formal abstracta, y aspectos externos, relacionados con su aplicación a la resolución de problemas reales (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001). Esta dualidad es extensiva a las Matemáticas escolares y se manifiesta explícitamente en distintas definiciones de la competencia matemática.

Así pues, las Matemáticas escolares presentan dos caras simultáneas que conviene tener presentes si se pretende que los estudiantes adquieran una competencia matemática. Por un lado, en su vertiente más interna, las Matemáticas constituyen un conocimiento “cerrado” en el sentido

en que no depende de otro tipo de conocimiento para ser construido, estudiado o comunicado. Las Matemáticas se caracterizan por ser un conocimiento de alto nivel de abstracción y generalidad, de naturaleza deductiva, que utiliza un lenguaje formal específico propio para ser comunicado y que está exento de intencionalidad o temporalidad (Onrubia, Rocheray Barberá, 2001).

Por otro lado, la vertiente de las Matemáticas que denominaremos externa se refiere al papel que juegan las Matemáticas en múltiples contextos extra matemáticos vinculados al mundo real. Así pues, es necesario atender a esta dualidad de las Matemáticas en la educación, intentando que los estudiantes puedan coordinar el significado matemático con el significado referencial. Una enseñanza de las Matemáticas dirigida a enseñar procedimientos matemáticos genera una descontextualización de los contenidos, convirtiendo las Matemáticas escolares en una repetición mecánica de técnicas con una conexión muy reducida con el mundo real (Onrubia y otros, 2001).

Por el contrario, si se pretende construir el conocimiento matemático desde sus aspectos externos, incidiendo en los procesos matemáticos que ocurren en situaciones reales, se hacen necesarios aspectos internos de las Matemáticas (Fernández y Figueiras, 2010). Dado que la definición de competencia matemática que se da en el currículum catalán de Educación Secundaria Obligatoria a la de explícitamente a elementos de las Matemáticas que podríamos definir, según los criterios anteriores, como componentes internos y externos de las Matemáticas, creemos que la adquisición de la competencia matemática implica la integración de los dos tipos de elementos, ya que para poder entender fenómenos clave del mundo actual es necesario disponer de diversos conocimientos sobre aspectos internos de las Matemáticas, que a su vez, para ser entendidos de forma significativa requieren de aspectos externos de las Matemáticas.

Para poder enseñar Matemáticas atendiendo a su propia dualidad y ofrecer a los estudiantes oportunidades para comprender aspectos internos de las Matemáticas y relacionarlos de forma significativa con aspectos externos, el profesor debe tener unos conocimientos matemáticos sólidos del tema que está enseñando, que le permitan ayudar a los estudiantes a comprender el tema más allá del soporte didáctico de que disponga. Profesores que no dispongan

de un buen conocimiento de la materia que enseñan tendrán menos posibilidades de poder ayudar a los estudiantes a aprender un determinado concepto (Ball y otros, 2008). Sin embargo, conocer sólo los contenidos matemáticos no es suficiente para enseñar. Aunque los puros conocimientos matemáticos favorecen la ayuda que pueda dar el profesor a los estudiantes para comprender las Matemáticas, no son suficientes, puesto que no garantizan que el profesor pueda dar un sentido matemático al trabajo de los estudiantes o disponer de diversas representaciones que le permitan representar el concepto de forma que los estudiantes lo puedan entender (Ball y otros, 2008).

El *Knowledge Quartet* (KQ) es una teoría desarrollada por Rowland (2008) en primera instancia para describir y analizar las observaciones hechas en el aula.

Es razonable suponer que las construcciones basadas en la práctica son potencialmente más útiles para los profesionales, en este caso los profesores de Primaria, que las construcciones desarrolladas sin este soporte y sin conocer la complejidad del conocimiento de la enseñanza.

Esta conceptualización del conocimiento de los profesores de Matemáticas fue creada en respuesta a la llamada de Fennema y Franke (1992) para estudiarlos en el contexto de la enseñanza. Ellos argumentaron que el hecho de que un profesor tenga un alto conocimiento de la materia, las Matemáticas en el caso que nos ocupa, influye de manera positiva cuando enseña, por lo que es muy importante que los profesores tengan un conocimiento adecuado de los contenidos, de los procedimientos, de las representaciones de dichos contenidos y de la relación entre conocimientos, procedimientos y representaciones, esto es, un conocimiento interrelacionado. Puesto que las Matemáticas son un vasto conjunto de abstracciones profundamente interrelacionadas, si los profesores no saben cómo trasladar dichas abstracciones a los estudiantes de manera que estos sean capaces de relacionarla con lo que ya saben, los estudiantes no podrán entenderlos contenidos que se les enseña (Fennema y Franke, 1992).

El marco del KQ fue desarrollado a partir de la observación de la enseñanza de las Matemáticas y de la categorización de situaciones en las que quedó revelado el conocimiento del contenido matemático. El objetivo del estudio de Rowland (2005) es descubrir cómo el

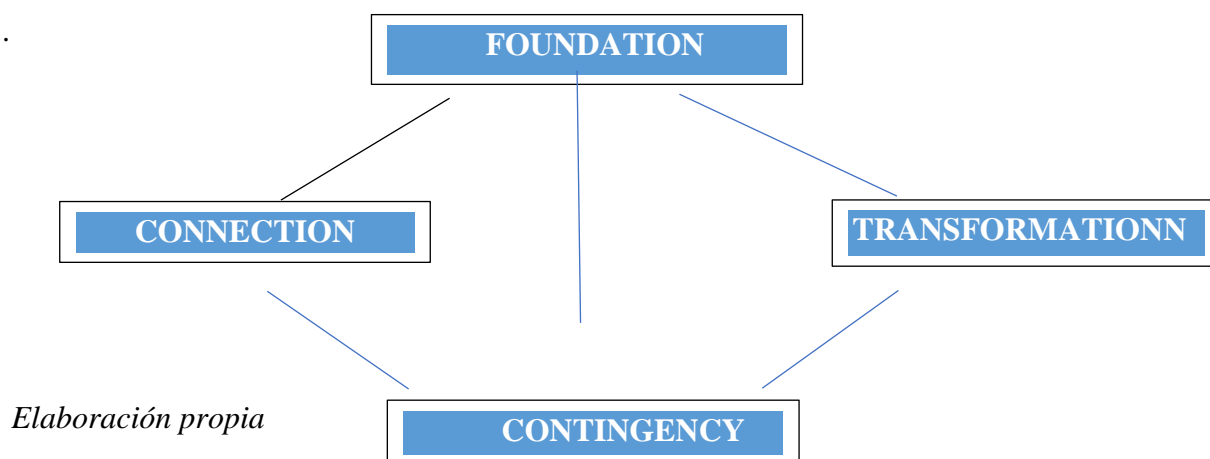
conocimiento del profesor (el estudio se centra en secundaria) se hace visible en el aula cuando enseña Matemáticas. En concreto:

a) Evidenciar si los profesores de Primaria con un fuerte conocimiento de la materia (*Subject Matter Knowledge*, SMK) tienden a ser más competentes que los que no tienen tantos conocimientos, es decir, si un conocimiento superior del SMK marca una diferencia respecto a la enseñanza de las Matemáticas elementales de Primaria y si esto es “observable” en la práctica del profesor “instruido” y viceversa.

b) Identificar y comprender mejor la manera en la que el conocimiento del contenido matemático de los profesores de Primaria (SMK), o la carencia del mismo, se pone de manifiesto en la práctica de la enseñanza.

A partir del análisis de las interacciones de los profesores de Primaria con el contenido matemático, Rowland elaboró un marco, el *Knowledge Quartet* (KQ), que permite observar el conocimiento matemático de los profesores en su práctica en el aula. En origen se consideraron 18 códigos claves en las que se ponía de manifiesto el conocimiento del contenido matemático del profesor. Posteriormente se agruparon estos códigos en cuatro categorías de rango superior. Se trataba de analizar primero, para después sintetizar y finalmente priorizar, o lo que es lo mismo, clasificar por relevancia. Estas 4 unidades que se ven en el siguiente diagrama, conceptos de rango elevado y se concibe el todo, el KQ, como una herramienta dirigida a la observación de clases de Matemáticas (Rowland, 2008).

Figura 3. Tabla Categorías del KQ.



2.1.13. Fundamento breve de la caracterización de cada una de las dimensiones del KQ:

Es la primera categoría de las 4 dimensiones del KQ, base de los otros tres tipos de conocimiento y que se refiere al conocimiento “teórico”. Es decir, consiste en los conocimientos, las creencias y la comprensión que los futuros profesores han adquirido “en su formación académica” y en sus prácticas para prepararse como profesores en el aula. Las componentes claves de este bagaje teórico son: el conocimiento y la comprensión de las Matemáticas *per se*, el conocimiento de lo más significativo de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, junto con las creencias concernientes a la naturaleza del conocimiento de las Matemáticas, los objetivos de la educación matemática y las condiciones en las que los estudiantes pueden aprender mejor Matemáticas.

Más concretamente, se trata de conocimiento de proposiciones y creencias –que los futuros enseñantes han adquirido “en su formación académica” para prepararse como profesores en el aula- concerniente a: Significados y descripciones de los conceptos matemáticos relevantes, relación entre los conceptos matemáticos relevantes, factores que la investigación ha mostrado significativos en la enseñanza y en el aprendizaje de las Matemáticas, conocimiento de lo más significativo de la literatura y el pensamiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, sistemas de creencias concernientes a la naturaleza del conocimiento de las Matemáticas, creencias sobre por qué y cómo se aprenden las Matemáticas, estatus ontológico de las Matemáticas, objetivos de la educación matemática de la enseñanza de las Matemáticas, condiciones en las que los estudiantes pueden aprender mejor Matemáticas.

Los códigos claves son: Conciencia de los objetivos, Identificación de errores, Conocimiento manifiesto de la materia, Puntos teóricos de pedagogía, Uso de terminología, Utilización de libros de texto, Dependencia de los procedimientos, transformación.

La segunda categoría tiene que ver con el conocimiento en acción, demostrado tanto en la planificación de lo que se va a enseñar como en el mismo acto de enseñar. Las descripciones y los significados propios del profesor se transforman y se presentan en método y manera que los

estudiantes sean capaces de aprenderlos. Como Shulman indica (1986), la presentación de ideas a los estudiantes conlleva la representación de las mismas en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Es particularmente importante la elección que hacen los futuros profesores de los ejemplos presentados a sus estudiantes con el fin de ayudarlos a la formación de un concepto, a la adquisición del lenguaje y para demostrar procedimientos (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2003).

La elección de ejemplos que hace el profesor se hace particularmente visible por: La óptima adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos, La confrontación y la resolución de ideas equivocadas o confusas comunes, La justificación (mediante ejemplos genéricos) o la refutación (mediante contraejemplos) de conjeturas matemáticas.

Códigos claves: Elección de representaciones, Demostraciones del profesor, elección de ejemplos y Conexión.

La tercera categoría combina ciertas elecciones y decisiones que se hacen en partes concretas del contenido matemático. Esta dimensión del conocimiento se refiere a la coherencia de la planificación o de la enseñanza a lo largo de un curso, lección o serie de lecciones. La concepción de esta coherencia incluye también la secuenciación de material para la enseñanza y conciencia de las demandas cognitivas pertinentes de los diferentes temas y tareas.

Se trata de conocimiento en acción manifestado en la deliberación y en la elección de la planificación y de la enseñanza. En una misma lección o a través de varias lecciones, el profesor *unifica* la materia de la asignatura y ofrece *cohesión* con respecto a por un lado, las conexiones entre diferentes significados y descripciones de conceptos particulares o entre modos alternativos de representar conceptos y de llevar a cabo los procedimientos; y por otro lado, la complejidad pertinente y la demanda cognitiva de conceptos y procedimientos matemáticos, por la atención de la secuenciación del contenido.

Así en un mismo episodio (lección o a través de varias lecciones), el profesor unifica la materia presentando coherencia respecto a: Conexiones entre diferentes significados de conceptos

concretos, Conexiones entre diferentes descripciones de conceptos concretos, Conexiones entre modos alternativos de representar conceptos concretos, Conexiones entre distintos procedimientos, Secuenciación de temas en la instrucción en una lección y entre Lecciones, Orden de tareas y ejercicios a realizar, Conciencia de las demandas cognitivas pertinentes de los diferentes temas y tareas.

Códigos claves: Establecimiento de conexiones entre procedimientos, Establecimiento de conexiones entre conceptos, Anticipación a la complejidad, Decisiones sobre la secuenciación, Reconocimiento de la conveniencia de los conceptos

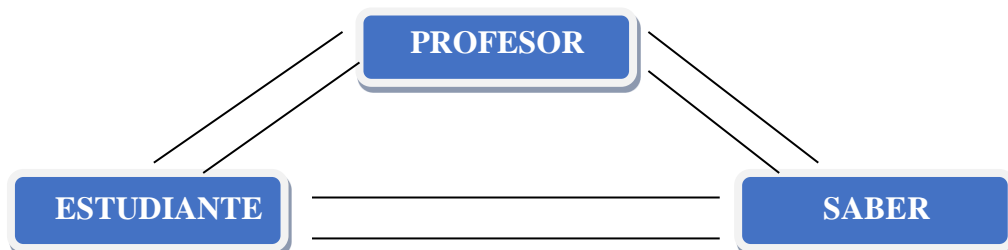
La cuarta y última categoría se manifiesta en los acontecimientos de la clase que no han sido planificados previamente. Es la habilidad, la capacidad para pensar sobre la marcha, “improvisar”, “reconducir”. Incluye la buena disposición para responder, por una parte, a las ideas de los estudiantes y la consiguiente preparación, si conviene, para desviarse del “orden del día” planificado al preparar la clase.

Se trata por tanto de conocimiento en interacción en el aula, manifestado en la habilidad del profesor para pensar sobre la marcha (según las circunstancias) y responder adecuadamente a las intervenciones de los estudiantes durante un episodio de clase. A veces esto puede verse en la voluntad del profesor para desviarse de lo que tenía programado (agenda de su propia programación) cuando la contribución inesperada de un estudiante pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho estudiante, o pueda implicar una vía de investigación productiva. Es el conocimiento relativo a las decisiones que se toman en el mismo momento de dar clase, es la habilidad de pensar y decidir en acción, e incluye: - Tratamiento de la interacción en el aula - - Dificultades del estudiante - Intervenciones desatendidas - Capacidad (habilidad) del profesor para desviarse de lo que tenía programado cuando la contribución inesperada de un estudiante pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho estudiante, o pueda implicar una vía de investigación productiva (rentable).

Códigos claves: Respuesta a las ideas de los estudiantes, Utilización de las oportunidades, Desviación de lo programado.

2.2.DIDÁCTICA DE LA TRIGONOMETRÍA

Figura 4.Fenómenos didácticos ligados a la construcción de la función trigonométrica



Elaboración Propia

2.3.SISTEMA DIDÁCTICO

Constantemente la problemática de investigación en la matemática educativa, es definida por los fenómenos didácticos que se presentan regularmente en los estudiantes, tras haber tenido un acercamiento al conocimiento matemático en cuestión, sin embargo, explicarlos en términos de lo que acontece en la institución requiere de un estudio sistémico sobre la relación del profesor y los estudiantes con respecto de un saber matemático escolar.

Se han identificado diversos contratos que condicionan y modifican las condiciones del sistema didáctico en el aula. Uno es el contrato social de enseñanza donde se establece la causa del saber a enseñar, dos donde se define la actividad, las responsabilidades, actitudes y los derechos de los participantes del fenómeno escolar, a saber, escuela profesor y estudiante; tres donde se establecen las relaciones sociales profesor – estudiante; y finalmente cuatro, el que refiere a las negociaciones profesor – estudiante, respecto del saber matemático escolar en juego.

Es claro que los contratos escolar y pedagógico, están sujetos a variables tales como: estructura institucional, modalidad educativa, calendarios escolares, programas académicos, horas clase, estándares de evaluación, tradición de enseñanza, entre otros, y por lo tanto, encontraremos diferencias significativas de una institución a otra, pero en tanto, dichos contratos son necesarios, para la existencia de un contrato didáctico.

La información, la interpretación y las restricciones del medio, rigen los comportamientos del estudiante en situación escolar, esto es, los contratos escolar y pedagógico, generan en el estudiante, concepciones de su actividad respecto del aprendizaje de las matemáticas en la escuela (D'Amore 1999):

La concepción escolar: El estudiante ajusta su comportamiento con base en aquello que espera le sea evaluado. Nadie le dice lo que habrá de hacer explícitamente, solo tiene que escribir lo que el profesor le transmite, porque el estudiante espera que eso le sea preguntado, sin embargo, a pesar de no ser explícito, el estudiante descifra el mensaje y se comporta en consecuencia.

La concepción de la matemática: El estudiante tiende a responder haciendo uso de objetos matemáticos, aun cuando la pregunta no lo requiera. Aunque no se haga explícito el uso de objetos matemáticos por parte del problema o de su maestro, la concepción que el estudiante tiene de la materia le hace tratar a la actividad operándola con números, expresiones matemáticas, graficas, entre otros. El cree que la respuesta habrá de ser matemática.

La concepción de la modalidad escolar: Aunque el objetivo, sea la adquisición de un concepto matemático, el estudiante tiende a repetir ejercicios de naturaleza semejante, pues el descubre que la modalidad de clase se conserva a lo largo del tiempo. Termina por aprender que la modalidad empleada por su maestro, le indica lo que él habrá de hacer.

Para identificar los fenómenos didácticos ligados a la construcción de la función trigonométrica, sus causas y efectos, es necesario entender cómo vive este conocimiento en escenario escolar y delimitar la concepción respectiva.

2.4.TPACK

Aunque muchos profesores utilizan las tecnologías de la información y la comunicación en el aula, muy seguramente lo hacen de manera empírica. Para que este tipo de metodología se integre de manera adecuada en el trabajo en clase, es necesario que contenga tres elementos básicos. ¿Cuáles son?

Judi Harris, docente e investigadora en Virginia (EE.UU.), experta en esta metodología, propone a los docentes integrar de forma eficaz los recursos y las herramientas digitales en el currículum básico de aprendizaje de sus estudiantes y, por lo tanto, también en el currículum básico de enseñanza de los docentes.

Los profesores necesitan esencialmente para poder integrar la tecnología de manera eficaz manejar tres tipos de conocimientos que tienden a intersecarse entre sí:

Figura 5. Tipos de conocimientos



<http://matt-koehler.com/tpack2/tpack-explained/>

1. Conocimiento tecnológico, estar enterado sobre las últimas tecnologías y la manera de usarlas.
2. Conocimiento pedagógico, cómo enseñar con eficacia.
3. Conocer contenidos, o conocimiento curricular, sobre lo que están enseñando o de los que están ayudando a sus estudiantes a aprender.

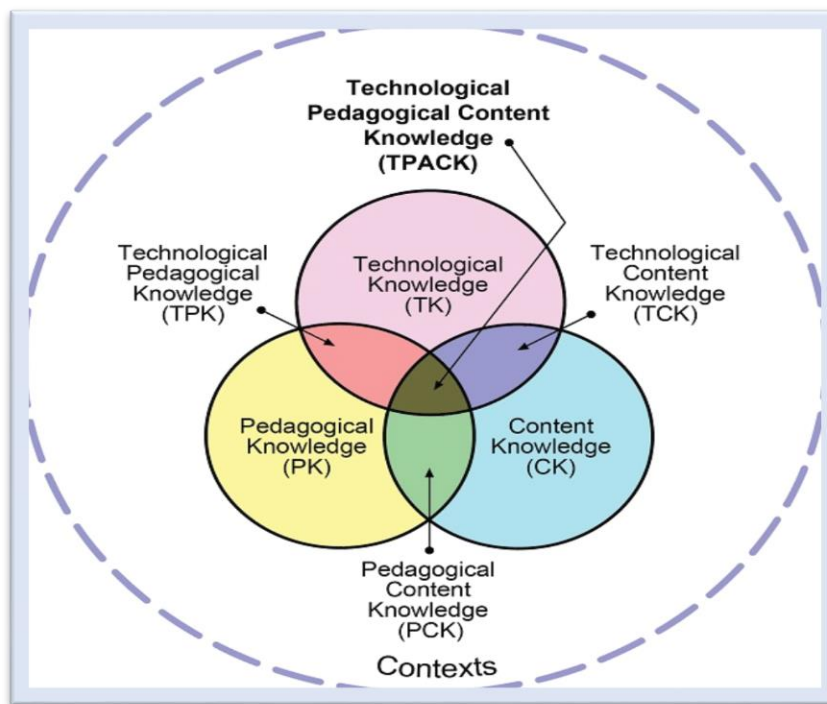
Separados estos conocimientos no son suficientes para enseñar a los estudiantes de manera eficaz y probada por medio de la tecnología, adicionalmente los docentes necesitan el conocimiento pedagógico-curricular, es decir cómo enseñar un contenido concreto y con qué medios.

Los docentes también necesitan conocimiento tecnológico-curricular, que es el conocimiento de cómo seleccionar las herramientas y los recursos que ayudarán a los estudiantes a aprender aspectos particulares de los contenidos y programas curriculares. Este conocimiento es el cómo enseñar bien con las nuevas herramientas digitales y tecnológicas. La unión de los dos tipos de conocimientos antes mencionados, que son interdependientes, sería el TPACK.

La metodología TPACK debe tomar en cuenta antes que nada que la planificación didáctica no debe centrarse en la herramienta tecnológica, sino en el tipo de estudiantes a los que va dirigida, y en los contenidos que se tienen que enseñar –el currículum-. Se debe conocer el cómo enseñar, es decir didáctica o pedagogía general: gestionar un aula, realizar una programación didáctica, escribir objetivos, etc. Además de las particularidades de la disciplina que se quiere enseñar, y ahora, el conocimiento tecnológico. La suma de ellos sería el conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar. La planificación docente siempre debe ser: situada, adaptada al contexto, basada en actividades.

Entre las competencias que deben tener los profesores son que sepa su asignatura y que sepa también pedagogía y sus nuevos métodos, y además tienen que saber de tecnología. Se necesitan profesores formados en la intersección entre esas tres materias y ser muy flexibles.

Figura 6. TPACK: Technology, pedagogy and content knowledge.



<http://matt-koehler.com/tpack2/tpack-explained/>

Hace unos pocos años que apareció un modelo denominado TPCK de difícil pronunciación al que se decidió añadirle una A, de modo que se convirtió en TPACK (en inglés: *Technology, Pedagogy And Content Knowledge*), que es una extensión de la expresión *Pedagogical Content Knowledge* de Shulman (1986) (PCK).

Este autor apreciaba que el conocimiento del ámbito científico o materia de especialidad del profesor y su conocimiento pedagógico estaban, o podían estar, separados y debían ser unidos. De este modo, el conocimiento del contenido se refiere al QUÉ enseñar y el conocimiento pedagógico al CÓMO hacerlo. Así la expresión: “conocimiento pedagógico del contenido” es diferente del conocimiento pedagógico sobre cómo enseñar en general, al tiempo que es distinto del saber de un área de terminada, de ser un experto en un determinado contenido, lo que no asegura que se sepa cómo enseñarlo. La expresión trata de combinar, o mejor interceptar, ambas dimensiones, convirtiéndose así en un conocimiento práctico sobre cómo enseñar lo que se supone que debe ser enseñado en un área dada.

Los tres elementos primarios y sus intersecciones dos a dos, más la intersección de los tres elementos dan lugar a siete dimensiones que, brevemente, señalo adaptando la descripción de Koehler y Mishra, (2009), no sin antes añadir que la situación ideal, tendencia, sería que los tres anillos se solapasen totalmente, algo que, como se comprende, no ocurrirá fácilmente.

2.4.1. El Conocimiento de los Contenidos (CK)

Es el conocimiento de los profesores sobre la materia que hay que aprender o enseñar. El contenido que se aborda en Ciencias en Secundaria o la Historia es diferente del contenido que se aborda en un curso de Universidad, o en el Arte o un seminario de postgrado en Astrofísica.

Como señaló Shulman (1986), este conocimiento podría incluir el conocimiento de los conceptos, teorías, ideas, marcos de organización, el conocimiento de evidencias y pruebas, así como las prácticas establecidas y enfoques hacia el desarrollo de tal conocimiento. Es el QUÉ se enseña.

2.4.2. El Conocimiento Pedagógico (PK)

Es el conocimiento profundo de los profesores sobre los procesos y las prácticas o métodos de enseñanza y aprendizaje. Abarca, entre otras cosas, los fines educativos en general, valores y objetivos.

Esta forma genérica de conocimiento se aplica a la comprensión de cómo aprenden los estudiantes, habilidades de manejo de la clase en general, la planificación de clases y la evaluación de los estudiantes. Es el CÓMO se enseña.

2.4.3. El Conocimiento Tecnológico (TK)

Es el conocimiento sobre ciertos modos de pensar y trabajar con la tecnología, las herramientas y los recursos. Trabajar con la tecnología se puede aplicar a todas las herramientas y recursos tecnológicos.

Esto incluye entender la tecnología de la información de forma lo suficientemente amplia como para aplicarla de manera productiva en el trabajo y en la vida cotidiana, ser capaz de reconocer cuándo la tecnología de la información puede ayudar u obstaculizar el logro de un objetivo, y ser capaz de adaptarse continuamente a los cambios de la misma.

2.4.4. El conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)

De modo similar a la idea de Shulman del conocimiento de la pedagogía, que se aplica ahora a la enseñanza de contenidos específicos. En la conceptualización del PCK de Shulman es central la noción de la transformación de la materia para la enseñanza.

En concreto, según este autor, esta transformación se produce cuando el maestro interpreta la materia, encuentra varias maneras de representarla, y se adapta y adapta los materiales de instrucción a las concepciones alternativas y de los estudiantes.

PCK cubre la actividad principal de la enseñanza, el aprendizaje, el currículo, la evaluación y la presentación de informes, así como las condiciones que promueven el aprendizaje y los vínculos entre los planes de estudio, la evaluación y la pedagogía.

2.4.5. El Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK)

La comprensión de la manera en que la tecnología y el contenido se influyen y limitan entre sí. Los profesores tienen que dominar más que la materia que enseñan; deben tener un profundo conocimiento de la manera en que el objeto (o los tipos de representaciones que se pueden construir) se pueden cambiar mediante la aplicación de tecnologías particulares.

Los maestros necesitan entender qué tecnologías específicas son las más adecuadas para abordar el aprendizaje objeto en sus dominios y cómo el contenido dicta o quizás incluso cambia la tecnología, o viceversa.

2.4.6. El Conocimiento Tecnológico-Pedagógico (TPK)

Se refiere a la comprensión sobre cómo la enseñanza y el aprendizaje pueden cambiar cuando se utilizan determinadas tecnologías de manera particular. Esto incluye saber las posibilidades y limitaciones de una gama de herramientas tecnológicas y pedagógicas que se relacionan con diseños apropiados para el desarrollo y las estrategias pedagógicas.

2.5.CONOCIMIENTO TECNO – PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO

Subyacente a una enseñanza significativa y profundamente competente con la tecnología, el TPACK es diferente del conocimiento de los tres conceptos en forma individual.

En su lugar, TPACK es la base de la enseñanza efectiva con la tecnología, lo que requiere una comprensión de la representación de los conceptos que utilizan tecnologías; técnicas pedagógicas que utilizan tecnologías de manera constructiva para enseñar a los contenidos; el conocimiento de lo que hace fáciles o difíciles los conceptos que hay que aprender y cómo la tecnología puede ayudar a corregir algunos de los problemas que afrontan los estudiantes; conocimientos previos de los conocimientos y teorías epistemológicas de los estudiantes; y el conocimiento de cómo las tecnologías pueden ser utilizadas para construir el conocimiento existente para desarrollar nuevas epistemologías o fortalecer las ya existentes.

3. CONCEPTOS BÁSICOS

3.1. FUNCIÓN

En matemática, una función (f) es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de forma que a cada elemento X del dominio le corresponde un único elemento $f(x)$ del codominio (los que forman el recorrido, también llamado rango o ámbito).

En lenguaje cotidiano o más simple, diremos que las funciones matemáticas equivalen al proceso lógico común que se expresa como “depende de”.

Las funciones matemáticas pueden referirse a situaciones cotidianas, tales como: el costo de una llamada telefónica que depende de su duración, o el costo de enviar una encomienda que depende de su peso.

3.2. FUNCIÓN SENO.

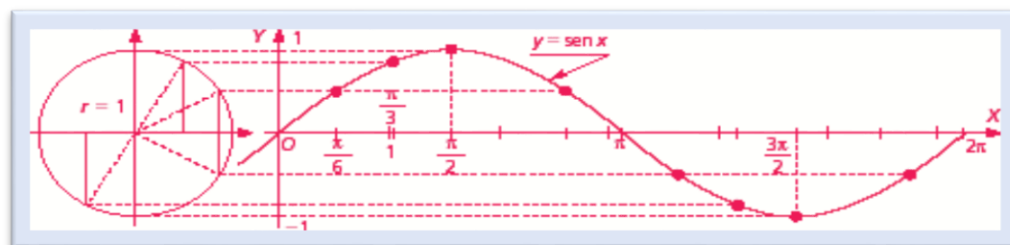
3.2.1. Concepto de Función Trigonométrica

Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

3.2.1.1. La Función Seno

Se denomina función seno, y se denota por $f(x) = \sin x$, a la aplicación de la razón trigonométrica seno a una variable independiente x expresada en radianes. La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

Figura 8. Gráfica de la función Seno



Las características fundamentales de la función seno son las siguientes:

1) Su dominio es \mathbb{R} .

2) Su recorrido es $[-1, 1]$ ya que $-1 \leq \sin x \leq 1$.

3) Corta al eje X en los puntos $k \cdot \pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.

4) Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

5) Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = -\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ y $b = \pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = \pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ y $b = 3\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

6) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $(\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi, 1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma $(3\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi, -1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

7) Es periódica de periodo 2π .

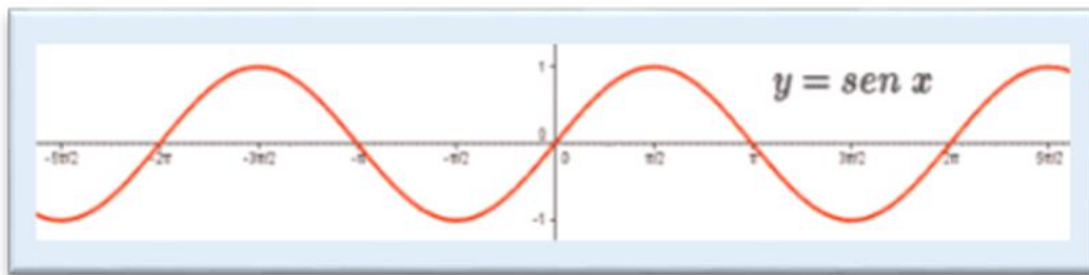
$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

La función $f(x) = \sin(k \cdot x)$ es periódica de periodo $p = 2\pi/k$

Para $|k| > 1$ el periodo disminuye y para $0 < |k| < 1$ el periodo aumenta.

8) Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1

Figura 9. Acotada superior por 1



http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primerio_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/seno.html

Figura10. Gráfica función seno

$f(x) = \text{sen } x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primerio_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/seno

Aplicación de las matemáticas en el análisis de los fenómenos físicos (anexo F)

4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta una descripción general del diseño metodológico de investigación y de los instrumentos de recogida de datos orientados a conseguir los objetivos planteados en este estudio. Se hará una descripción global de las distintas fases que constituyen el objeto de la investigación: Diagnóstico, planificación y diseño, aplicación y evaluación

4.1.TIPO DE ESTUDIO

Se recurrió a la metodología cualitativa de tipo interpretativo, que incluyó la observación participante, registros video gráficos, grabaciones de audio, hojas de respuestas de los estudiantes, para posteriormente describir, analizar y vincular la información de acuerdo a los fenómenos que ocurren naturalmente en el de aula de clase, con el uso de la AHD.

Para (Coll, 1989.). La opción por una perspectiva cualitativa no significa renunciar a la cuantificación y a los instrumentos de análisis formal (estadísticos u otros) sino tomar como preocupación prioritaria la decisión de qué eventos tiene sentido cuantificar con el fin de conseguir “descripciones más precisas y validar las interpretaciones contextuales”. Citado por (Erikson, 1996).

4.2. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se realizó en la I.E Nuestra Señora de La Presentación en el departamento de Risaralda., institución con 1050 estudiantes, 40 docentes, y 3 directivos. Según datos del Proyecto Educativo Institucional, PEI (2018), el colegio funciona en dos sedes y una jornada, modalidad académica., y cubre Preescolar, Básica Primaria (1° a 5°), Básica Secundaria (6° a 9°), Educación Media académica y técnica (10° y 11°)

La unidad de análisis estuvo compuesta por los estudiantes de grado 10 B, constituidos por 33 estudiantes, que cumplieron con los siguientes criterios de selección: Estudiantes que cursan el grado 10 en la I.E Nuestra Señora de La Presentación con un promedio de edad de 15 años y con características socioculturales muy similares entre sí. Estudiantes que dieron su consentimiento informado para participar en el proceso investigativo y asistieron al 98 % de las actividades planeadas en el desarrollo de la secuencia didáctica.

4.3.TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

4.3.1. Técnica de Observación Participante

Hay que distinguir entre lo que es “observación” y “observación participante”. La primera es una técnica para la recogida de datos sobre comportamiento no verbal, mientras que la segunda hace referencia a algo más que una mera observación, es decir, implica la intervención directa del observador, de forma que el investigador puede intervenir en la vida del grupo.

Araújo, (2009) “En palabras de Goetz y LeCompte (1998). La observación participante se refiere a una práctica que consiste en vivir entre la gente que uno estudia, llegar a conocerlos, a conocer su lenguaje y sus formas de vida a través de una intrusa y continuada interacción con ellos en la vida diaria”. (p. 277).

En esta investigación el trabajo de aula va a ser desarrollado por el profesor / investigador. Eso significa que tiene una participación directa en una serie de actividades durante el tiempo que dedica a observar a los sujetos objeto de observación, y participar en sus actividades para facilitar una mejor comprensión. Exige preparación, diseño y organización previa a las secciones de trabajo de campo durante la experiencia.

4.3.2. Registros videográficos

El vídeo como instrumento de registro o apoyo visual en la investigación permite obtener mayor información por la posibilidad de registrar imagen y sonido. De acuerdo con García Gil, (2011) “El vídeo es en sí mismo una forma de indagar y recoger información, así como de construir y reconstruir realidades, no solo desde quien investiga sino también desde las personas o unidades que narran su situación a través de las imágenes en movimiento”. (p.4)

Para este estudio los registros videográficos constituyen el principal instrumento de observación en el desarrollo de la investigación, con ellos se pretende documentar los ambientes de aprendizaje en el aula de clase, y evidenciar los procedimientos, situaciones, expresiones, comportamientos anímicos y expresivos de los estudiantes.

Se registran varias sesiones de grabación (filmación de clases) necesarias para el desarrollo de la secuencia didáctica, correspondiente al desarrollo temático de enseñanza de la función trigonométrica seno, las que luego se analizan a la luz del marco teórico.

4.4.DISEÑO METODOLÓGICO

4.4.1. Diseño de modelo pedagógico. (DMP)

El diseño del modelo pedagógico surge de la necesidad de optimizar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la función SENO para garantizar su eficacia. Es por eso que, necesariamente, tiene que integrar en su intervención los diferentes aspectos que convergen en la programación de intenciones pedagógicas y en la generación de los recursos materiales. Por lo tanto, el DMP acontece un concepto en el que confluyen aspectos como el enfoque pedagógico, las teorías del aprendizaje y didácticas de las matemáticas, el diseño de materiales educativos para la enseñanza de la función SENO con TIC.

Para nuestro trabajo de investigación se hizo pertinente, diseñar un modelo pedagógico, a la luz del enfoque pedagógico socioconstructivista, mediado por teorías de aprendizaje: la teoría del aprendizaje autónomo, la teoría del aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje colaborativo

A dicho modelo, se llega relacionando las principales características del enfoque pedagógico, en este caso el modelo socioconstructivista y las principales características de las teorías de aprendizaje con las cuales se trabajarán, es decir, aprendizaje autónomo, aprendizaje basado en problemas y aprendizaje colaborativo, como se muestra en la tabla 4. Es importante resaltar, que dicha relación entre características del modelo pedagógico y las características de cada teoría de aprendizaje, permiten definir ritmos de aprendizaje, conocimientos previos y nivel de desarrollo de los estudiantes, toma en cuenta la reestructuración y reorganización del conocimiento, como también define características propias de aprendizaje, como trabajar colaborativamente, adquiriendo conocimientos más relevantes y profundos, direccionamiento del propio aprendizaje por parte del estudiante, la forma de aprendizaje es más activa y dinámica, autodependiente y creativo, la metodología es centrada en el estudiante y en su aprendizaje, los estudiantes trabajan en pequeños grupos, Se basa en la experiencia directa y la interacción. Se establece una interdependencia que no debe ser competitiva, Los miembros del grupo se necesitan los unos a los otros y deben considerar aspectos como el establecimiento de metas, tareas, recursos, roles.

En tal perspectiva, las anteriores categorías, posibilitan para el estudiante desde el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función seno, una mejor aprehensión de conocimientos, un mejor desarrollo de competencias, ya que se tiene en cuenta sus saberes previos, entre los estudiantes se genera una interdependencia positiva y se alcanza una construcción de conocimientos compartidos que permitirán alcanzar el estándar planteado por el MEN cuando propone que el estudiante, debe describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.

Los valores numéricos establecidos en dicha tabla, indican la valoración más alta entre la relación de las características del modelo pedagógico y las características de cada teoría de aprendizaje que se van a tener en cuenta al momento de aplicar dicho modelo.

Tabla 1 Modelo pedagógico

<i>ENFOQUE PEDAGOGICO SOCIOCONSTRUCTIVISTA</i>				
TEORIAS DEL APRENDIZAJE				
	<i>Toma en cuenta el nivel de desarrollo de los alumnos, sus saberes previos</i>	<i>Fomenta un rol activo del alumno en su aprendizaje</i>	<i>Enfatiza la importancia de la interacción (con padres, profesores y otros alumnos).</i>	<i>Hacer énfasis en la reestructuración y reorganización del conocimiento, es decir construcción de significados compartidos</i>
	Se aprende a trabajar colaborativamente, adquiriendo conocimientos más relevantes y profundos		5	
APRENDIZAJE AUTONOMO	Dirigimos nuestro propio aprendizaje	5		
	La forma de aprendizaje es más activa y dinámica.	5		
	Autodependien te y creativo	5		

	Responde a		
	una metodología	5	
	centrada en el alumno y		
	en su aprendizaje		
	Los alumnos		
	trabajan en pequeños	5	
	grupos.		
	Esta metodología		
	favorece la posibilidad		
	de interrelacionar		5
APRENDIZAJE	distintas materias o		
ABP	disciplinas académicas.		
	El ABP puede utilizarse		
	como una estrategia		
	más dentro del proceso		
	de enseñanza y		
	aprendizaje, aunque		5
	también es posible		
	aplicarlo en una		
	asignatura durante todo		
	el curso académico		
	Se basa en la		
	experiencia directa y la		
	interacción. Se		
	establece una	5	
	interdependencia que		
	no debe ser		
	competitiva.		
APRENDIZAJE	Los alumnos trabajan		
COLABORATIVO	en conjunto dentro y		
	fuera del aula, y el		
	método puede variar en		
	cuanto a su	5	
	organización desde		
	poco estructurado por el		
	docente, hasta muy		
	estructurado, en lo que		

se conoce como

aprendizaje

cooperativo.

Los miembros del

grupo se necesitan los

unos a los otros y deben

considerar aspectos

como el

5

establecimiento de

metas, tareas, recursos,

roles, etcétera.

Todos los

integrantes del grupo

son responsables de

hacer su parte del

5

trabajo, pero, además,

deben dominar el todo.

Elaboración propia

4.4.2. Diseño y creación de la Ayuda Hipermedial dinámica para la enseñanza de la función SENO en el marco del modelo pedagógico

Inicialmente, se hizo fundamental el aprendizaje del manejo de la herramienta CmapTools para crear la **AHD**, como aplicación que permite crear mapas conceptuales, que permiten insertar hipervínculos, exportar, importar documentos digitales en audio, video y escritos.

Dentro de la estructura de la AHD, se diseña un concepto llamado PRESENTACION, el cual permite al estudiante, orientarse en la ruta de aprendizaje del núcleo temático de LA FUNCION SENO, criterio que permite enmarcar las diferentes actividades, dentro del marco del aprendizaje autónomo, ya que el estudiante de forma individual puede indagar sobre aspectos generales de la AHD, (cómo está diseñada, objetivos de aprendizaje entre otros. Esta además, describe como está estructurada dicha ruta, describiendo paso a paso cada una de las estaciones de trabajo y sus respectivas actividades, enmarcándose dentro de las características y la dinámica de trabajo con las diferentes teorías de aprendizaje (Autónomo, ABP y Colaborativo,

seguidamente, se crea un concepto, llamado **CONTENIDO**, que le permite al estudiante, visualizar a manera de índice, todos los temas que conforman esta ayuda como la estructura conceptual de la **AHD**, permitiendo que el estudiante, se entere de todos los núcleos temáticos que se desarrollaran, para que pueda indagar, y confrontar conocimientos previos con el formal en torno a la **FUNCION SENO**.

Además, un concepto llamado **ROLES Y TRABAJO EN EQUIPO**, que especifica los roles de trabajo por equipo e individualmente, criterios que permiten dinamizar el aprendizaje de la función seno, desde las teorías del aprendizaje colaborativo y autónomo.

Adicionalmente, un concepto llamado **INSTRUCCIONES Y CRITERIOS DE TRABAJO**, donde se acuerdan las normas de trabajo y criterios, establecidos al momento de empezar a desarrollar la clase, lo que llamaría Brousseau en su teoría de las situaciones didácticas: el contrato didáctico.

A continuación, se estructuran tres niveles: El nivel I de la **AHD**, se denomina (**REPASO DE FUNCIONES**), en el se incorporaron 3 videos, el primero, un video introductorio sobre las funciones en la vida cotidiana, el segundo, dirigido a que el estudiante apropie el concepto de lo que es dominio y rango de una función, el tercero, es un video orientado a realizar un repaso sobre la representación algebraica y dos documentos en línea, que reafirman el concepto de función, en la perspectiva de conseguir el objetivo y retomar conceptos fundamentales para la apropiación del núcleo temático objeto de la **AHD**. En el mismo nivel I, de la **AHD**, se propone un concepto, llamado **MODELACION DE SITUACION CON FUNCIONES**, en el cual, al hacer clic se abre un link en Word, que permite que el estudiante registre allí una situación con las características mencionadas. Tal situación, servirá como elemento de evaluación al docente. En este mismo nivel de la **AHD**, se propone un concepto llamado **EVALUACION**, en el cual, al hacer clic, se despliega un formato de evaluación sobre conceptos básicos de funciones, esta evaluación la desarrollan en equipo, en esta, se propone al estudiante, dadas situaciones sobre funciones en forma de enunciado, que las lleve a su representación general o algebraica, como también, se le da su representación algebraica, para que realice tabla de valores (tabular) y llegue con esta, a su representación gráfica en el plano cartesiano.

Esta última actividad está mediada por el trabajo colaborativo, los estudiantes la desarrollan en equipos con los roles previamente establecidos.

En el nivel 2 de la **AHD**, se propicia un ambiente de aprendizaje para los estudiantes, cuyo tema principal es las funciones trigonométricas.

Este nivel inicia, mostrando un concepto que posee un enlace de video y un documento, que lleva al estudiante a realizar un repaso sobre sistemas de medidas de ángulos, seguidamente ubica al estudiante en un concepto llamado funciones trigonométricas, en donde al hacer clic, recrea al estudiante en la parte de la construcción de las funciones trigonométricas, desde el círculo trigonométrico.

Posteriormente, siguiendo la ruta de la AHD, se propone un concepto llamado función trigonométrica seno, la cual le muestra al estudiante, todas las características y particularidades de la función seno, luego, encontramos otros conceptos que nos refieren a la inversa de la función seno y su gráfica, para luego ya terminar realizando algunos ejercicios relacionados con la función y su correspondiente evaluación. Estos, corresponden a tareas que interactúan directamente con el estudiante en archivos de Word, trabajando de forma individual (Aprendizaje Autónomo), como talleres de ejercicios propuestos, para posteriormente realizar de forma grupal siguiendo los roles una discusión sobre el trabajo realizado (aprendizaje colaborativo).

La planificación de este nivel 2 de la AHD, que tiene por título FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, (FUNCIÓN SENO), en el cual se asocian diferentes conceptos como representación de la función seno, grafica, características de la función, busca brindarle al estudiante, los elementos necesarios para que supla sus dificultades en torno a este núcleo temático.

En el nivel 3 de la **AHD**, (TRANSFORMACIONES DE LA FUNCIÓN **SENO**), específicamente, introducen al estudiante, en aspectos como amplitud, fase, periodo, frecuencia, traslación positiva y negativa en X y Y, se crean 7 conceptos, y se involucran 8 videos y un documento escrito, además, un documento con enlace en Word, llamado EVALUACION

FINAL, la decisión de involucrar más videos que documentos escritos, se toma ya que el docente identifica mayor comprensión e interacción con estos.

Tabla 2. Planificación y categorías de análisis.

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase I: Caracterización	Diagnosticar un problema de enseñanza de la trigonometría en el aula de clase.	Al tener como problema de estudio la poca o nula competencia que el estudiante tiene para describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas, situaciones evidenciadas y diagnosticados en las pruebas SABER DE GRADO 11.
Fase II: Investigación	Identificar los aportes didácticos de las AHD como estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la función seno	Se procede de acuerdo, con el modelo pedagógico diseñado para aplicar y evaluar los contenidos desarrollados en el aula. 1. Por ello comenzaremos a elaborar una revisión bibliográfica sobre AHD, y el uso de las Tic aplicadas a la enseñanza de las matemáticas 2. Elaborar una revisión bibliográfica sobre el Enfoque pedagógico socioconstructivista y las teorías de aprendizaje (autónomo, colaborativo y basado en problemas). 3. Elaborar una revisión bibliográfica sobre los problemas de la enseñanza de las funciones trigonométricas, específicamente la función seno.
Fase III: Diseño e Implementación	Crear una ayuda hipermedia dinámica para favorecer un acercamiento significativo, en la enseñanza de la función seno.	- Diseño y construcción del Diseño Pedagógico con uso de la AHD para la enseñanza de la función seno (de acuerdo, con el diseño pedagógico elaborado). - Selección, adecuación y construcción de recursos didácticos para el desarrollo las unidades temáticas de acuerdo con el diseño pedagógico, definido para esta investigación, para la enseñanza y el aprendizaje de la función seno, utilizando la aplicación Cmaptools

Fase IV: Aplicación	Aplicar la estrategia didáctica AHD, desarrollada en el grado 10 b, de la I.E. Nuestra Señora de La Presentación.	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicación de la secuencia didáctica con uso de la AHD en 3 secciones de clase de 2 horas, en el grado 10 B, de la Institución IENSP. - Elaboración productos y presentaciones, de los estudiantes, donde evidencian el trabajo autónomo y colaborativo en las actividades propuestas en el instrumento.
Fase V: Análisis y Evaluación	<p>Evaluar el desempeño de la estrategia didáctica con los estudiantes en 4 aspectos preestablecidos como:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Creación de material educativo. - Uso de recursos educativos. - Estrategias Comunicativas en el aula de clase. - Adaptación de recursos educativos al contexto. <p>Estrategias comunicativas planteadas a la luz del enfoque pedagógico socioconstructivista y las teorías del ABP, aprendizaje Colaborativo y Autónomo en estudiantes de grado 10B, de la Institución Educativa Nuestra Señora de La Presentación.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas desde el enfoque socioconstructivista en la enseñanza de expresiones algebraicas, en lo referente a: - Uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase con estudiantes del grado 10b de la IENSP de La Virginia Risaralda. - Evaluar el desempeño alcanzado durante la implementación de la estrategia didáctica, relacionada con el diseño pedagógico

Elaboración propia.

Secuencia didáctica (anexo G)

4.5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

A continuación, se realiza el análisis e interpretación de las situaciones ocurridas durante el proceso de desarrollo de clase con uso de la AHD, y la secuencia didáctica.

Ver anexo H

Ver anexo K

Tabla 3. Clasificación de las interpretaciones

TABLA DE CLASIFICACIÓN DE LAS INTERPRETACIONES			
OBJETIVO 1	OBJETIVO 2	OBJETIVO 3	OBJETIVO GENERAL
Diseñar un modelo pedagógico para la enseñanza de la función seno en el aula de clase. I19, I22, I25, I27, I29, I30, I32, I33, I39, I40, I44, I45, I46, I48, I49, I50, I54, I55, I56, I58, I62, I69.	Crear una Ayuda Hipermedial Dinámica para favorecer la enseñanza de la función seno. I1, I2, I3, I6, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16, I17, I25, I28, I31 I47, I52, I54 I58, I59, I64, I69	Crear una secuencia didáctica con uso de la AHD para la enseñanza de la función seno y desarrollarla en el aula de clase para valorar los aportes didácticos. I18, I19, I20, I21, I22, I23, I24, I25, I26, I31, I49, I50 I52, I58, I59, I60, I62, I64, I66, I69	Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas desde el enfoque socioconstructivista en la enseñanza de la función seno, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase, con estudiantes de décimo grado de la institución educativa Nuestra señora de La Presentación en La Virginia Risaralda.

5. CONCLUSIONES

C.1. Construcción de un modelo pedagógico que permita la enseñanza de la función seno, con uso de la AHD como componente dinamizador, con los estudiantes de grado décimo de la institución educativa Nuestra Señora de La Presentación en La Virginia Risaralda.

A la luz del modelo socioconstructivista se evidenció que crear un modelo pedagógico para la enseñanza de la función SENO, exige de competencias pedagógicas como identificar ritmos de aprendizaje, conocimientos previos, sistemas de representación semiótica con el que mejor aprenden, que le permita abordar distintas teorías y aplicarlas en contexto. Vale la pena indicar que, a la hora de establecer las relaciones entre estas teorías, el insumo principal fue los

resultados del diagnóstico, visualizando desde allí, alternativas de enseñanza y de aprendizaje de la función SENO para abordar en diferentes contextos y estilos de aprendizaje. Por esta razón, se hizo una tabla que indicaba las prioridades de estas relaciones para enfrentar el problema diagnosticado de enseñar la función seno, además, se encontraron aspectos didácticos relevantes, como la interacción con contenidos hipermediales, (imagen, audio, movimiento), que le permitieron al estudiante significar el concepto de función, además, el uso de la AHD, le permitió al docente, recrear el concepto de función trigonométrica, a través de varios sistemas de representación, como lo fueron los diagramas sagitales, las expresiones algebraicas de una función y las gráficas en el plano cartesiano, e involucrarse con situaciones de su contexto, para terminar modelando situaciones periódicas de su entorno, como lo afirma Shulman (1987).

También, se pudo conocer que la interacción del estudiante con recursos digitales le permitieron ampliar o reducir, cambiar parámetros y variables en torno al análisis de una situación problema, como lo afirma (Litwin, 1994), permitieron mayor apropiación del conocimiento, desde allí, estos elementos le aportan al docente para orientar el proceso de enseñanza en torno a la función trigonométrica seno, en tal perspectiva, igualmente se encontró que la teoría de aprendizaje colaborativo, permitió mejor interacción de los estudiantes cuando cada líder emitía la sustentación del constructo sobre la pregunta qué es una función?, por tanto cada elemento de los subgrupos formados aportó a dicho constructo y la forma como cada líder de cada grupo contribuyó a la construcción del concepto de función, evidenciándose procesos de acción, formulación y validación.

C.2. Con el uso de la AHD, como elemento dinamizador estructurante (andamiaje) y soporte mediador en el proceso de construcción del conocimiento en torno a la enseñanza de la función seno, se encontró que cuando el estudiante interactúa con diferentes sistemas de representación, como la misma expresión verbal, representaciones a través de diagramas sagitales, diagramas de Venn, representaciones en el plano cartesiano, tablas, representaciones algebraicas de una función, lectura de una situación problema a la luz del concepto de función, como también, la resolución de situaciones problema cotidianas o fenómenos físicos, de matematización del movimiento y específicamente fenómenos periódicos, el estudiante, apropia de una mejor manera el saber que se pretende, permitiendo que el docente, utilice a través de la

AHD, (previamente diseñada), diversas formas de representación, para una mejor comprensión de lo que es la función seno, como lo expresa Shulman : "formas de expresar, exponer, escenificar o representar ideas de otra manera, de suerte que los que no saben puedan llegar a saber, los que no entienden puedan comprender y discernir, y los inexpertos puedan convertirse en expertos" (Shulman, 1987), en otras palabras, se trata de las estrategias de enseñanza a la luz del tópico específico, FUNCIONES o bien, la didáctica del contenido específico. Así pues, el profesor debe tener un amplio repertorio de formas o alternativas de representación, algunas de las cuales derivan de la investigación, mientras que otras se originan de la práctica docente.

Es así, como esta posibilidad didáctica y tecnológica la brinda la AHD, cuando el estudiante interactuó con los videos propuestos (características de la función seno, dominio y rango, aplicaciones), utilizándose el video, porque fue importante magnificar el concepto de la función seno, en tal sentido, la ayuda me permitió la posibilidad de repetirlo en algunas oportunidades, situación que le permite al estudiante reafirmar el concepto, por cuanto la AHD, tiene la posibilidad de repetir el video las veces que el estudiante necesite, como se evidenció en cada nivel de la misma. Desde esta perspectiva, la AHD, fue factor fundamental en la comprensión del conocimiento por parte de los estudiantes.

C3. Una de las grandes ventajas que permitió un mejor aprendizaje de la función seno, es el uso de las Tic (AHD), a través de mediadores digitales, videos explicativos, la guía digital de aprendizaje, páginas web, archivos de Word, como medio para obtener la comprensión del concepto de funciones (Nivel I AHD), la función trigonométrica (Nivel II, AHD) y Transformaciones de la función seno (Nivel III, AHD), como alternativa al método tradicional de la explicación por parte del profesor en el tablero, fue el uso del Pc, como complemento que permitió que los estudiantes, pudieran acceder a información, aplicaciones, ejemplos y actividades de refuerzo, de modo que pudieran seleccionar y apropiarse los conocimientos que requerían de una forma autónoma y consciente.

En tal sentido, el docente realizó una propuesta de enseñanza, (uso de la AHD y Secuencia didáctica para la enseñanza de la función seno), buscando superar dificultades de aprendizaje de los estudiantes, aprovechando al apoyo que brindan actualmente las TIC con

recursos de videos explicativos sobre funciones, la guía digital de aprendizaje, páginas web, archivos de Word, como lo afirma (Litwin, 1994). Además, se consideró el ordenador, para aprender de él y con él, como lo indica (Quintana, citado en Capllonch, 2005) y la integración que tuvo de los recursos semióticos convencionales (letras, texto, ecuaciones, gráficos, etc.) sumado a la ampliación de los límites de presentar, compartir, transmitir grandes cantidades de información con menor tiempo y espacio, lo que favorecía la autonomía y experimentación del estudiante, al permitirle explorar, profundizar, juzgar los contenidos, como lo indican (Coll & Monereo, 2008); (Coll, Mauri, & Onrubia, 2008); (Gros, 2008).

5.1.CONCLUSIÓN GENERAL

La ejecución de un modelo pedagógico para la enseñanza de la función seno, en este caso el socioconstructivista, con la adaptación de tres teorías del aprendizaje como lo son: el aprendizaje autónomo, el aprendizaje basado en problemas y el colaborativo, con estudiantes de grado diez, en la Institución Educativa Nuestra Señora de La Presentación en La Virginia Risaralda, le permitieron al docente, manejar una gran posibilidad de situaciones pedagógicas y didácticas, entre ellas la apropiación del conocimiento a través de AHD, la cual le posibilita al estudiante apropiar saberes y desarrollar competencias matemáticas, a través, del uso de mapas conceptuales, que le ofrecen opciones para interactuar con hipervínculos alrededor de la función seno, además, planificar un andamiaje conceptual que le permite al docente, conocer el ritmo de aprendizaje que maneja el estudiante, y suplir las necesidades o carencias cognitivas acerca de la función seno, en tal perspectiva, permitió también, que el docente planifique sus clases a través de una alternativa didáctica como lo es la AHD, transformando su saber matemático y haciéndolo llegar al estudiante con representaciones, analogías, ejemplos, situaciones de la vida cotidiana, alrededor de una gran cantidad de información, accesible a través del uso del ordenador, en el menor tiempo posible, a través, del uso de la AHD y la gran posibilidad de los mediadores digitales que permiten el uso de la misma cuando se aborda el núcleo temático la función trigonométrica seno, encontrándose la gran significación que tiene el estudiante al manejar información que le permitió significar diferentes sistemas de representación de un mismo tema, como sucedió con el manejo del concepto encontrado en los diferentes videos sobre función, la representación general o algebraica de una función, la representación a través del plano

cartesiano y las posibilidades de ampliar, reducir la escala para registrar valores en él y poder encontrar su gráfica, encontrar diferentes ejemplos de la vida cotidiana como de fenómenos físicos y compararlos con los guardados en archivos de Word, elaborados por ellos mismos, para así llegar a realizar una confrontación entre sus saberes previos y el formal, como también representar situaciones problema cotidiano sobre funciones a través de su forma general (modelación), como lo manifiesta el MEN, a través de los estándares de competencias en matemáticas para grado diez: Modelar situaciones cotidianas periódicas, a través de la función trigonométrica seno.

Otra posibilidad que le permitió al docente esta amalgama entre el modelo pedagógico socio constructivista y las teorías de aprendizaje mencionadas, a la luz de las categorías contenidas en las dimensiones de la teoría del cuarteto del conocimiento, como lo asegura Rowland (2008), es la posibilidad de conexión vertical y horizontal entre los conceptos y conocimientos que subyacen la enseñanza de la función seno, estructurados en la AHD.

Se encontró, que para el docente, fue pertinente en el proceso de enseñanza de la función seno, haber dispuesto los tres niveles de enseñanza como muestra la AHD (Nivel I, repaso funciones, Nivel II, Función trigonométrica seno, Nivel III, transformaciones de la función trigonométrica seno), por cuanto se llevó conceptualmente al estudiante en un paso a paso, con el cual aprendió de acuerdo a su ritmo de aprendizaje, además, le permitió al estudiante suplir los vacíos, lagunas y dificultades cognitivas propiciadas por el desconocimiento del concepto de función. En tal sentido es importante resaltar la pertinencia que como ayuda didáctica permite el uso e interacción con la AHD, en torno a este núcleo temático, así mismo, las posibilidades didácticas que permite el uso de las TIC al profesor de matemática, a través del conocimiento tecnológico pedagógico del contenido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amador Montaña, J. F., Rojas García, J. L., & Sánchez Bedoya, H. G. (2015). Indagación Progresiva (IP) con Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en el currículo escolar del Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

An, S., G. Kulm y Z. Wu (2004), “The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and U.S.”, *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 7, pp. 145-172

Arreaga, D., Fuente, L., Pardo, A., & Delgado, C. (2005). Adaptación de Material Educativo Guiada por IMS Learning Design: Experiencias con LRN. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 209-235.

Bartolomé, O. y Fregona, D. (2003) El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales. En Panizza, M. (Comp) *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Ed. Paidós

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 399-406 Available from: https://www.researchgate.net/publication/288701829_Discutiendo_el_conocimiento_matematico_especializado_del_profesor_de_infantil_como_genesis_de_aprendizajes_futuros [accessed Jun 11 2018].

Barrows, H. (1986). A Taxonomy of problem-based learning methods, en *Medical Education*, 20/6, 481–486.

Baxter, J. y N. Lederman (1999), "Assessment and measurement of pedagogical content knowledge", en J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for science education*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic, pp. 147-161.

Benito, A. Y Cruz, A. (2005). *Nuevas claves para la docencia universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superior*. Madrid: Narcea.

Bergoña, G., & contreras., D. (2006). *Alfabetización Digital y el desarrollo de competencias ciudadanas*. Barcelona , España.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 2, 6.

Brusilovsky, P. (1996). *Methods and techniques of adaptive hypermedia*. Obtenido de Scholar.org: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf2b/bec1de0e73a5ce76bdebae03252919e3236f.pdf>

Cabrera, E. (2008). *La colaboración en el aula: Más que uno más uno*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Catillo, S.(2009) *Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las tic en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela.

Cardozo Cardone, J. J. (15 de septiembre de 2010). *TIC y educación; Los aprendizajes colaborativos como estrategia para la construcción del conocimiento*. Buenos Aires, Argentina.

Chiriboga, M., Umatambo,S. (2013) *La influencia del uso de material multimedia en el mejoramiento del aprendizaje de la Trigonometría en los estudiantes del décimo año de educación básica del Colegio Rincón del Saber en el año lectivo 2011-2012*. Universidad Central de Ecuador

Chinnappan, M. y M. Lawson (2005), "A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 8, pp. 197-221.

Chen, W. (2004), "Learning the skill theme approach: Salient and problematic aspects of pedagogical content knowledge", *Education*, vol. 125, núm. 2, pp. 194-212.

Coll, C.; Mauri, T. y Onrubia, J. (2008b). "Análisis de los usos reales de las TIC en contextos educativos formales: una aproximación sociocultural", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 10(1).

Coll, C., Mauri, T. & Onrubia, J. (2008a). Análisis de los usos reales de las TIC en contextos educativos formales: una aproximación socio-cultural.

Coll, C. y Monereo, C. (2008). *Psicología de educación virtual*. Madrid, Morata.

Cooney, T. J. (1994), "Research and teacher education: In search of common ground", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 6, pp. 608-636.

De Miguel, M. (2005). *Metodologías de enseñanza para el desarrollo de competencias*. Orientaciones para el profesorado universitario ante el Espacio Europeo de Educación Superior. Madrid: Alianza.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. Edición en idioma español con anexos e integraciones: D'Amore B. (2006).

Díaz B., F., Hernández., G. & Rigo., M. A. (2009) *Aprender a enseñar con TIC en Educación Superior: Contribuciones del Socio constructivismo*. México.

Erikson, F. (1996). *Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza*, II (pp195-301). Barcelona, Paidós.

Even, R. y D. Tirosh (1995), “Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29, núm. 1, pp. 1-20.

Fernández, J. M., & Trigueros, C. C. (2016). Mensajería instantánea y construcción compartida de significados: Una experiencia de aprendizaje colaborativo en el prácticum del maestro de básica primaria. *RED. Revista de Educación a Distancia*. Núm 51. Artic. 4., 3.

García, R. (2000) *El conocimiento en construcción*. Barcelona, Gedisa Editorial.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., y Martínez, M. (2011). Re-defining HCK to approach transition. In M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of CERME 7* (pp. 2640-2649). Rzeszów, Poland University of Rzeszów. Available from: https://www.researchgate.net/publication/288701829_Discutiendo_el_conocimiento_matematico_especializado_del_profesor_de_infantil_como_genesis_de_aprendizajes_futuros [accessed Jun 11 2018].

Rowland, T. , Huckstep, P. Y Thawaites, A. (2005) Triggers of contingency in mathematics teaching. In b. Ubuz.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers’ Knowledge and its Impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: MacMillan Publishing.

Gálvez, G. (1994): “La didáctica de las matemáticas”, en *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.*, C. Parra, I. Saiz (comp.), Buenos Aires, Paidós Educador.

Glatthorn, A.A. (1990), *Supervisory Leadership*, Nueva York, Harper Collins.

Gonçalves, D. S. (junio de 2011). *La reflexión sobre el proceso de aprendizaje propio*: Girona, Burgos.

González, D. M. (2011). Recursos educativos tic de información, colaboración y aprendizaje. Revista de Medios y Educación. ISSN: 1133-8482 Píxel-Bit., 70.

Gonzáles, A., Madoz, M., Izurieta, A., Y Zudaire. (2011) Aplicación hipermedia para el planteo y resolución de problemas matemáticos Herrero, M. P. (11 de Junio de 2012). La interacción comunicativa en el proceso de. Obtenido de <http://www.ugr.es/~miguelgr/ReiDoCrea-Vol.1-Art.19-Herrero.pdf>

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. Revista EMA, 251-292.

Gess-Newsome, J. y N.G. Lederman (eds.) (1999), Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic.

Huertas, R. M. (septiembre de 2009.). Formación de la autonomía a través del aprendizaje estratégico.

Johnson, D. W. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula.

Johsua S., Dupin J-J. (1993): Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, Paris, Presses Universitaires de France.

Katz,V. (1987). The Calculus of tehe trigonometric funtions, Historia Matematica.No.14, 311-324

Kirschner,P. (2004) What we know about CSCL an implementing it in higher education. Kluwer Aademic Publicher Norwell, MA, EUA.

Lage, F. J. (5 de 12 de 2005). Ambientes de aprendizaje cooperativo y colaborativo. Obtenido de SEDICI. Repositorio Institucional de la UNLP: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/4058>

Linares, c. (2000), "Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: A case from the teaching of the concept of function", *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, vol. 6, núm. 1, pp. 41-62.

Litwin, E. (1994) "La tecnología educativa y la didáctica: un debate vigente", En: *Revista Educación*, Vol. III, 2(6), 135-151. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires. Disponible en: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5056982.pdf

Kilpatrick, J.; Gómez, P. y Rico, L. (1995). *Educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Martin G., X. (2006). *Investigar y aprender. Cómo organizar un proyecto*. Barcelona: Editorial Horsori.

Margolinas, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la dase de mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Medina Rivilla, A., Domínguez Garrido, M. C., & Sánchez Romero, C. (10 de Julio de 2008.). *Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria*. Obtenido de Modelo de diseño de medios didácticos para el desarrollo de las competencias. : <http://www.eduonline.ua.es/jornadas2008/comunicaciones/2C5.pdf>

MEN. (23 de julio de 2004). Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.: http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-85458_archivo_pdf1.pdf

MEN. (30 de 06 de 2017). Colombia aprende. Obtenido de Boletín Siempre Dia E: https://diae.mineduacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2016/166572000015.pdf

Montiel, G. (2005) *Estudio socio epistemológico de la función trigonométricas*. Tesis de doctorado, Cicata-IPN, México.

Mulero, J., Segura, L., Sepulcre, J. (2014) Las matemáticas de nuestra vida. Universidad de Alicante

Monereo, C., Pozo, J. I. & Castelló, M. (2004) Capítulo 9: enseñanza de estrategias de aprendizaje en el contexto escolar. En Desarrollo psicológico y educación. 2 Psicología de educación escolar. Compilación de César Coll, Jesús Palacio y Álvaro Marchesi. Madrid: Editorial Alianza.

Olfos, A. R., Soto, S. D., & Silva, C. H. (Noviembre de 2005). La iniciación al álgebra escolar: una tradición que no cambia. XVIII. Obtenido de Encuentro Nacional de Investigadores en educación CPEIP, MINEDUC. Barnechea Chile. Noviembre.:

http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07052007000200005

Onrubia, J., Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., & Zabala., I. S. (1999). El constructivismo en el aula. En J. Onrubia, Enseñar: Crear Zonas de Desarrollo Próximo e Intervenir en Ellas. (pág. 5). Barcelona: Grao.

Onrubia, J. (1992) Interacción e influencia educativa: Aprendizaje de un procesador de textos. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, España.

Rojas, J. L., Sánchez, H. G., Amador, J. F. & Duque, E. A. (2013) Las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en los proyectos de aula en TIC. Otra forma de enseñar y aprender conjuntamente. Computadores Para Educar - Universidad Tecnológica de Pereira. Estrategia integral de formación y acceso 2012 - 2014. Colombia: Publiprint S.A.

Payer, Mariangeles. (2005) Teoría del constructivismo social de Lev Vygotsky en comparación con la teoría Jean Piaget. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación. Documento disponible en <http://constructivismos.blogspot.com>

Palarea, M. M. (diciembre de 1999). La adquisición del lenguaje algebraico: Reflexiones de una investigación. Números revista de la didáctica de las matemáticas volumen 40., 3-28.

Pineda, D. (2006) Impacto del Uso de Multimedia en el Desempeño de los Alumnos y en la Práctica Docente en los Cursos de Trigonometría. Instituto Tecnológico Nuevo León, México.

Pinto, S. J., & González, A. M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262008000300005&script=sci_arttext&tlng=pt

Prieto, L. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas, en Miscelánea Comillas. Revista de Ciencias Humanas y Sociales Vol.64, núm.124, 173-196.

Rowland. (2008) Researching Teachers mathematics disciplinary knowledge. International handbook of mathematics teacher education: Knowledge and beliefs in mathematics.

Rochera, M., Barbera, G., Y Onrubia, J (2001) La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas una perspectiva psicológica. Psicología de la educación escolar), ISBN 84-206-8685-9, págs. 487-508.

Guy Brousseau(1998), La Teoría de Las Situaciones Didácticas del fundamento pedagógico.

Vigostky (1978), La Teoría Socio-constructivista.

Ministerio Educación Nacional, (MEN, 2015), Estándares básicos de competencias en Matemáticas.

Amador Montaña, J. F., Rojas García, J. L., Sánchez Bedoya, H. G., & Duque, Acosta, E. (2015).

Sebastián Montiel (2005), American Mathematical Society 69 (2005) .

Sandra Castillo, Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela. Mayo de 2009

Andrés Alexander Sánchez Rosal. Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TIC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa febrero de 2010.

Gloria Luz Urrea Galeano. Octubre de 2012. Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría mediada por las nuevas tecnologías: estudio de caso en el curso nivelatorio de Matemáticas básicas de la universidad nacional de Colombia – sede Medellín.

Valderrama Ramírez, Nathalia (2013). Construcción de las funciones trigonométricas haciendo un contraste entre la utilización y ausencia de TIC. Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia.

Gómez (2002), Urrea, G.(2012). Análisis Didáctico para la estructura conceptual de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, implementa para dos grupos de estudiantes de grado decimo de la IED los Alpes.

Coll, Mauri, & Onrubia, (2008). Proceso de incorporación de TIC, grupo de investigación CRIE - Creando en Redes de Información y Educación) de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP).

Rojas, Sánchez, Amador & Duque (2013). Producto multimedial AHD p.44.

Mulero, J., Segura, L., Sepulcre, J. (2014). dificultad objetiva de las matemáticas como disciplina y subjetiva con que el individuo afronta esta dificultad.

Lee Shulman (1989). Teoría conocimiento didáctico del contenido del profesor.

Guy Brousseau. Teoría de las situaciones didácticas.

Lev Vygotsky (1978). Precursor del constructivismo social.

Jean Piaget. Precursor del Constructivismo Psicológico.

Tunnerann, C. (2014). Perspectiva del constructivismo psicológico.

Barrows (1986). “Aprendizaje Basado en Problemas para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”.

Prieto (2006). Aprendizaje Basado en Problemas, aprendizaje activo

Miguel (2005). Desarrollo de competencias en el estudiante.

Benito y Cruz (2005). ABP favorece el desarrollo del razonamiento eficaz y la creatividad.

Gonçalves, (2011). Aprendizaje Autónomo.

Huertas (2009). El estudiante identifica sus posibilidades y limitaciones frente a la realización de la tarea.

Zimmerman (2000), la autorregulación.

Amador Montaña, Rojas Garcia, & Sanchèz Bedoya (2015). Proceso de autodirección, los estudiantes transforman sus capacidades en habilidades académicas.

Johnson (1999), Cabrera (2008), Cardozo Cardone, (2010). Aprendizaje Colaborativo.

Bergoña & contreras.(2006).

Kumar (1996). Sintetización al diseño y desarrollo de sistemas de aprendizajes colaborativos en 7 elementos.

Lage (2005). Dominio Del Aprendizaje Colaborativo.

Siza (2009). Tutorización en el aprendizaje colaborativo.

Guy Brousseau. Teoría de Situaciones.

Johsua y Dupin (1993). Cap. V “La perspectiva constructivista.

Rolando García (2000). Aprendizaje por Adaptación.

Brousseau (1998) Cap.V. concepto de “devolución”.

Margolinas (1993) capítulo I. Interpretación falsa de la noción de situación a-didáctica.

Bartolomé y Fregona (2003). Teoría variable didáctica, artículo - capítulo IV.

Glatthom (1990), Cómo adaptar el material representado a las características de los estudiantes.

Cooney (1994), Pinto y González (2006). El CDC.

Shulman , Chinnappan y Lawson (2005), Chen (2004), An, Kulm y Wu (2004), Sánchez y Llinares (2002 y 2003), Llinares (2000), Baxter y Lederman (1999). El CDC.

Even, (1990), Llinares (1993), García (1997), López (1999).

Carslen, (1987), López (1999) y McDiarmid, Ball y Anderson (1989).

Barnett y Hodson (2001).

Van Driel, De Jong y Verloop, (2002). Conocimiento de la didáctica específica.

Smith y Neale (1989). Hawkins como la habilidad de hacer "penetrable" el contenido a los estudiantes.

Even y Tirosh (1995).

Tim Rowland (2008). Teoría del Knowledge Quartet.

Deborah Ball y otros (2008). El Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) o los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar.

Onrubia, Rochera y Barberá (2001). Conocimiento Dual.

Fennema y Franke (1992). Coneptualización del conocimiento de los profesores de Matemáticas.

Rowland, Huckstep y Thwaites (2003).

Judi Harris, docente e investigadora en Virginia (EE.UU.), experta en TPACK

Goetz y LeCompte (1998). La observación participante.